MATHEMATISCHE ZEITSCHRIFT

UNIVERSITY OF HAWAII
LIBRARY

UNTER STÄNDIGER MITWIRKUNG VON

E. KAMKE
TÜBINGEN

R. NEVANLINNA
HELSINKI

E. SCHMIDT
BERLIN

F. K. SCHMIDT
JENA

HERAUSGEGEBEN VON

K. KNOPP
TÜBINGEN

WISSENSCHAFTLICHER BEIRAT:

W. BLASCHKE L. FEJÉR G. H. HARDY
E. HECKE G. HERGLOTZ O. PERRON
W. SÜSS W. THRELFALL H. WEYL

48. BAND 1. HEFT

(ABGESCHLOSSEN AM 22. JUNI 1942)

QA1
M88
V.48-50

BERLIN
SPRINGER-VERLAG
1942

Die **MATHEMATISCHE ZEITSCHRIFT**

erscheint in zwanglosen Heften, die zu Bänden von etwa 50 Bogen vereinigt werden.

Die Mathematische Zeitschrift ist durch jede Buchhandlung zu beziehen.

Die Mathematische Zeitschrift dient der Pflege der reinen Mathematik, doch werden natürlich auch Beiträge aus den Gebieten der theoretischen Physik und Astronomie Aufnahme finden, soweit sie mathematisch von Interesse sind. Besprechungen, Aufgaben u. dgl. werden nicht zugelassen.

Es wird ausdrücklich darauf aufmerksam gemacht, daß mit der Annahme des Manuskriptes und seiner Veröffentlichung durch den Verlag das ausschließliche Verlagsrecht für alle Sprachen und Länder an den Verlag übergeht, und zwar bis zum 31. Dezember desjenigen Kalenderjahres, das auf das Jahr des Erscheinens folgt. Hieraus ergibt sich, daß grundsätzlich nur Arbeiten angenommen werden können, die vorher weder im Inland noch im Ausland veröffentlicht worden sind, und die auch nachträglich nicht anderweitig zu veröffentlichen der Autor sich verpflichtet.

Die Mitarbeiter erhalten von ihren Arbeiten 75 Sonderdrucke unentgeltlich. Weitere 125 Exemplare werden, falls bei Rücksendung der 1. Korrektur bestellt, gegen eine angemessene Entschädigung geliefert. Darüber hinaus gewünschte Exemplare müssen zum Bogennettopreise berechnet werden. Mit der Lieferung von Dissertationsexemplaren befaßt sich die Verlagsbuchhandlung grundsätzlich nicht; sie stellt jedoch den Doktoranden den Satz zur Verfügung zwecks Anfertigung der Dissertationsexemplare durch die Druckerei.

Manuskriptsendungen sind zu richten an die Mitglieder der unterzeichneten Redaktion. Die Herren Mitarbeiter werden im Interesse einer raschen Drucklegung gebeten, die Arbeiten in gut lesbarer Niederschrift einzureichen. Für den Text ist, wenn irgend möglich, Maschinenschrift, für die mathematischen Formeln jedoch nur Handschrift zu verwenden. Etwaige Abbildungen sind auf einem besonderen Blatt zu zeichnen. Die in den Formeln etwa vorkommenden griechischen oder deutschen Buchstaben (Fraktur) sind stets besonders (etwa mit einem farbigen Stift) zu kennzeichnen. Die Fußnoten sind fortlaufend zu numerieren, bei Zitaten Erscheinungsjahr und Seitenzahlen anzugeben.

Wenn zu einer bereits gedruckten Arbeit eine Berichtigung nötig wird, wollen die Herren Verfasser dem Herausgeber hiervon unverzüglich Mitteilung machen. Die Berichtigungen sollen dann am Schlusse eines Bandes gesammelt aufgenommen werden.

REDAKTION DER MATHEMATISCHEN ZEITSCHRIFT:

E. Kamke, Tübingen, Eßlinger Straße 16,
K. Knopp, Tübingen, Waldhäuser Straße 105,
R. Nevanlinna, Helsinki, Pietarink 5 a,
E. Schmidt, Berlin-Charlottenburg 2, Bismarckstraße 107[IV],
F. K. Schmidt, Flughafen Ainring, Post Freilassing (Obb.).

48. Band. **Inhalt:** 1. Heft.

Seite

Bompiani, Prof. Dr. E., Roma (Ital.), Via Verona 22: Sul diagramma di Newton relativo ad una singolarità di una curva algebrica piana 1

Carathéodory, Prof. Dr. C., München 27, Rauchgasse 8: Gepaarte Mengen, Verbände, Somenringe 4

Hamel, Prof. Dr. G., Berlin W. 30, Eisenacher Str. 35: Über die ebene Bewegung eines unausdehnbaren Fadens 27

Hasse, Korv.-Kapt. Prof. Dr. H., Oberkdo. d. Kriegsmarine M.-Wa. Stab F, Berlin-Wannsee, Am Sandwerder 5: Der n-Teilungskörper eines abstrakten elliptischen Funktionenkörpers als Klassenkörper, nebst Anwendung auf den Mordell-Weilschen Endlichkeitssatz 48

Kamke, Prof. Dr. E., Tübingen, Eßlinger Str. 16: Über die definiten selbstadjungierten Eigenwertaufgaben bei gewöhnlichen linearen Differentialgleichungen. IV. 67

Kneser, Prof. Dr. H., Tübingen, Staufenstr. 18: Zur Stetigkeit der Wurzeln einer algebraischen Gleichung 101

Lösch, Prof. Dr. F., Rostock, Parkstr. 34: Über die restringierte Limitierung von Doppelfolgen nach den Verfahren von Cesàro, Hölder und Euler-Knopp 105

Müller, Prof. Dr. M., Tübingen, Mathem. Seminar d. Universität: Über die Existenz periodischer Lösungen bei gewissen Systemen gewöhnlicher Differentialgleichungen erster Ordnung 128

Perron, Prof. Dr. O., München 27, Friedr.-Herschel-Str. 11: Über eine für die Invariantentheorie wichtige Funktionalgleichung 136

Seifert, Prof. Dr. H., Braunschweig, Luftf.-Forsch.-Anst. Herm. Göring, Postfach 390: Zur asymptotischen Integration von Differentialgleichungen 173

Das vorliegende Heft wurde von E. Kamke zusammengestellt.

Sul diagramma di Newton relativo ad una singolarità di una curva algebrica piana.

Al Prof. KONRAD KNOPP
in occasione del suo 60° compleanno, 22/7/1942.

Nota di E. Bompiani (Roma).

Sia C una curva piana algebrica d'ordine n con un punto multiplo d'ordine $r\,(<n)$ in O. Posta ivi l'origine di un sistema di assi cartesiani (x, y) l'equazione di C è del tipo

$$\varphi_r(x, y) + \varphi_{r+1}(x, y) + \cdots + \varphi_n(x, y) = 0$$

essende le φ_i *forme* dei gradi indicati dall'indice. L'equazione $\varphi_r(x, y) = 0$ fornisce le tangenti in O. Fra esse ve ne sia una d'ordine $s \leqq r$, e si assuma come tale la retta $y = 0$, sicchè $\varphi_r(x, y) = y^s \varphi_{r-s}(x, y)$.

E' ben noto l'uso del *diagramma di Newton* nello studio del ramo o dei rami della curva che escono da O con la tangente $y = 0$. Ad ogni termine $a_{pq} x^p y^q$ dell'equazione effettivamente presente ($a_{pq} \neq 0$) si fa corrispondere in un diagramma cartesiano il punto (p, q); l'insieme di questi punti è il diagramma dell'equazione. Si dicono rette *separatrici* le rette contenenti due o più punti del diagramma e che lasciano tutti gli altri punti (che non contengono) del diagramma da parte opposta al punto (0, 0). Se si considera su ciascuna separatrice il tratto compreso fra i due punti estremi del diagramma che essa contiene, l'insieme di questi tratti è una poligonale aperta, convessa rispetto a (0, 0), con gli estremi sugli assi $q = 0$, $p = 0$: questa poligonale e i semiassi positivi p, q, a partire dai punti d'incontro con essa determinano una regione del piano (p, q) in cui cadono tutt'i punti del diagramma.

Una separatrice determina col suo coefficiente angolare il rapporto fra l'ordine e la classe del ramo o dei rami di C cui essa dà luogo. Precisamente, se ad essa appartengono i due punti (p_0, q_0) e (p_1, q_1), e sia per es. $p_0 < p_1$ e $p_0 > q_1$, e se

$$x = t^\nu, \quad y = a t^\mu + b\, t^{\mu+1} + \cdots \; (a \neq 0, \quad \mu > \nu > 0)$$

è un ramo relativo a quella separatrice, deve aversi

$$\frac{p_1 - p_0}{q_0 - q_1} = \frac{\mu}{\nu}$$

e per ogni altro punto (p, q) del diagramma è

$$\nu p + \mu q \geqq \nu p_0 + \mu q_0 = \nu p_1 + \mu q_1$$

(il segno = valendo per i punti situati su quella separatrice). I numeri ν e $\nu' = \mu - \nu$ sono l'ordine e la classe del ramo.

Può accadere che il tratto di separatrice costituente un lato della poligonale sopra indicata contenga due soli punti a coordinate intere p, q, precisamente quelli che lo determinano. Può anche accadere che detto tratto contenga più di due punti a coordinate intere: due di essi appartengono certamente al diagramma dell'equazione, ma gli altri possono essere o non essere punti del diagramma. Quando un punto a coordinate intere situato sul tratto di separatrice in esame *non* appartiene al diagramma diremo che si ha ivi una *lacuna*. Ora *il numero e la posizione delle lacune sulla separatrice* (o, se si vuole, il numero e la posizione su di essa dei punti del diagramma) *sono caratteri proiettivi del ramo, quindi della singolarità.*

Si consideri infatti una trasformazione proiettiva non degenere che lasci inalterato il punto O e la tangente $y = 0$, di equazioni (in coordinate omogenee x, y, t)

$$\begin{aligned} x &= \alpha x' + \beta y' \\ y &= y' \qquad\qquad \alpha\varepsilon \neq 0 \\ t &= \nu x' + \delta y' + \varepsilon t'. \end{aligned}$$

Il termine $a_{pq} x^p y^q t^{n-(p+q)}$ dà origine ad un termine $\alpha^p \varepsilon^{n-(p+q)} a_{pq} \times$ $\times x'^p y'^q t'^{n-(p+q)}$ e ad altri termini $a'_{p'q} x'^{p'} y'^{q'} t'^{n-(p'+q')}$ per i quali è $p' + q' \geqq p + q$, $q' > q$. Anzi se il punto (p, q) relativo alla curva data C è su una separatrice anche il punto (p', q') relativo alla curva trasformata C' è sulla separatrice ad essa relativa e per ogni altro punto (p', q') che s'introduce con la trasformazione è

$$\nu p' + \mu q' = \nu p + \mu q + \mu(q' - q) + \nu(p' - p) > \nu p + \mu q + \nu(p' + q' - p - q)$$

cioè

$$\nu p' + \mu q' > \nu p + \mu q.$$

Ne segue che la figura dei punti del diagramma posti sulla separatrice non cambia passando da C a C': e questo si voleva provare.

Rimane ora a dare il significato geometrico delle lacune in relazione alla curva C.

Sia $a_{p_0 q_0} x^{p_0} y^{q_0}$ il termine di grado (complessivo in x, y) più basso che concorre alla determinazione di un tratto di separatrice: sia cioè (p_0, q_0) il punto *più alto* (e più *a sinistra*) del tratto in esame, caratterizzato dai valori μ e ν primi fra loro. Procedendo su di esso *verso il basso* s'incontrano i punti a coordinate intere

$$(p_0, q_0), (p_0 + \mu, p_0 - \nu), (p_0 + 2\mu, q_0 - 2\nu), \ldots, (p_0 + h\mu, q_0 - h\nu);$$

l'ultimo punto, dovendo essere o sull'asse p o al di sopra di esso, deve corrispondere ad un $h \leqq \left[\frac{q_0}{\nu}\right]$ = massimo intero contenuto in $\frac{q_0}{\nu}$.

Per esaminare la *lacuna* di posto k, cioè l'ipotesi che il punto $(p_0 + k\mu,\ q_0 - k\nu)$, *non* appartenga al diagramma di Newton, consideriamo la polare ϱ-esima di O rispetto a C. Da un termine $a_{p,q} x^p y^q t^{n-(p+q)}$ di C si ottiene un termine della polare che differisce da $a_{p,q} x^p y^q t^{n-\varrho-(p+q)}$ soltanto per un fattore numerico; e questo comparisce effettivamente solo se $n - \varrho - (p+q) \geqq 0$, cioè se $\varrho \leqq n - (p+q)$. Perciò non hanno influenza sulla determinazione di detta polare i termini di grado $p + q > n - \varrho$. Se si pone $\mu - \nu = \nu'$ e $\varrho_k = n - (p_0 + q_0) - k\nu'$ non hanno influenza sulla polare ϱ_k-esima i termini di grado $> r - \varrho_k = p_0 + q_0 + k\nu'$ che si potranno quindi a quest'effetto trascurare.

Nei termini da considerare di grado $\leqq p_0 + q_0 + k\nu'$ l'esponente q della y è sempre $> q_0 - k\nu$ ad eccezione del termine col coefficiente $a_{p_0+k\mu,\, q_0-k\nu}$. Perciò se questo è $\neq 0$ l'equazione della polare è divisibile per $y^{q_0-k\nu}$ (e non per una potenza più alta): nel caso opposto è divisibile per $y^{p_0-k\nu+1}$ (almeno). Sicchè

Condizione necessaria e sufficiente affinchè su un tratto di separatrice caratterizzato dal suo punto più alto (p_0, q_0) e dal suo coefficiente direttivo, cioè dai numeri ν e $\mu = \nu + \nu'$ primi fra loro, vi sia una lacuna di posto k è che la polare d'ordine $n - \varrho_k = p_0 + q_0 + k\nu'$ del punto singolare in esame abbia la tangente ai rami determinati da quella separatrice come componente multipla secondo $q_0 - k\nu + 1$ (almeno).

(Eingegangen am 31. Januar 1942.)

Gepaarte Mengen, Verbände, Somenringe.

Herrn Konrad Knopp
zum 60. Geburtstag am 22. Juli 1942 gewidmet.

Von

C. Carathéodory in München.

---

1. Einleitung. Eine der am häufigsten auftretenden Kennzeichnungen einer Menge $\mathfrak{m}$ von Elementen $a, b, \ldots, x, \ldots$ erhält man, indem man aus der Menge aller Paare (x, y) ihrer Elemente eine willkürliche, aber wohldefinierte Teilmenge solcher Paare aussondert. Eine derartige Menge $\mathfrak{m}$, bei welcher gewisse Paare von Elementen ausgezeichnet sind, wird im folgenden eine „gepaarte Menge" genannt, und die Elemente jedes einzelnen der ausgezeichneten Paare werden zueinander konjugiert genannt.

Nun kann man jeder beliebigen Teilmenge $\mathfrak{a}$ von $\mathfrak{m}$ diejenige Teilmenge $\mathfrak{a}'$ von $\mathfrak{m}$ zuordnen, die aus allen Elementen x besteht, welche gleichzeitig zu allen Elementen von $\mathfrak{a}$ konjugiert sind. Setzt man dann $\mathfrak{a}' = \mathfrak{b}$, $\mathfrak{a}'' = \mathfrak{b}'$, so zeigt sich, daß immer $\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{a}''$ ist und daß diejenigen Teilmengen von $\mathfrak{m}$, für welche $\mathfrak{a} = \mathfrak{a}''$ ist, eine besondere Rolle spielen; sie sollen die „normalen" Teilmengen von $\mathfrak{m}$ genannt werden. Die wichtigste Eigenschaft der normalen Teilmengen besteht darin, daß sie immer einen Verband $\mathfrak{M}$ bilden, der auf sich selbst involutorisch abgebildet ist.

2. Ist insbesondere eine Menge teilweise geordnet, so erhält man eine natürliche Paarung derselben, indem man die Elemente, welche bei der teilweisen Ordnung „relativ prim" zueinander sind, zu Paaren zusammenfaßt. Dagegen kann man nicht immer einer gegebenen gepaarten Menge $\mathfrak{m}$ eine solche teilweise Ordnung aufprägen, daß die dadurch entstehende natürliche Paarung gerade die gegebene wird. Das ist vielmehr dann und nur dann möglich, wenn der erwähnte Verband $\mathfrak{M}$ ein Somenring ist, dessen komplementäre Elemente die involutorische Selbstabbildung von $\mathfrak{M}$ erzeugen. Diese Erkenntnis bildet eins der Hauptresultate der vorliegenden Arbeit.

3. Wir betrachten jetzt eine Paarung von $\mathfrak{m}$, für welche $\mathfrak{M}$ ein Somenring ist. Es gibt dann mindestens eine, in der Regel aber unendlich viele teilweise Ordnungen von $\mathfrak{m}$, deren relativ prime Elemente die gegebene Paarung erzeugen. Unter diesen gibt es eine ausgezeichnete, welche aus jeder der übrigen durch Adjunktion von gewissen „Bindungen" $a \subseteq b$ entsteht und aus der gegebenen Paarung sehr leicht konstruiert werden kann.

4. Im zweiten Teil der Arbeit fassen wir die Elemente a, b, ... einer Menge $\mathfrak{m}$ zu Klassen $\bar{a}$, $\bar{b}$, ... zusammen, welche ihrerseits als Elemente einer Menge $\overline{\mathfrak{m}}$ aufgefaßt werden. Ist die Menge $\mathfrak{m}$ gepaart, so ist es unter Umständen möglich, die Klassen $\bar{a}$, $\bar{b}$, ... so zu wählen, daß die normalen Teilmengen von $\mathfrak{m}$ sämtlich Klassenmengen sind. Dann ist $\overline{\mathfrak{m}}$ ebenso wie $\mathfrak{m}$ gepaart, und der Verband $\mathfrak{M}$ der normalen Teilmengen von $\mathfrak{m}$ ist dem Verbande $\overline{\mathfrak{M}}$ der normalen Teilmengen von $\overline{\mathfrak{m}}$ isomorph.

In vielen Fällen kann man den Prozeß der Bildung von Klassen, welche die erwähnte Eigenschaft besitzen, iterieren, indem man von der neuen gepaarten Menge $\overline{\mathfrak{m}}$ ausgeht. Es gibt aber immer schon beim ersten Schritt eine eindeutig bestimmte Wahl der Klassen $\bar{a}$, $\bar{b}$, ..., so daß der obige Prozeß nicht mehr wiederholt werden kann. Ist dies der Fall, so soll die Paarung von $\overline{\mathfrak{m}}$ eine reduzierte Paarung genannt werden. Man erhält immer dieselbe reduzierte Paarung derselben Menge $\overline{\mathfrak{m}}$, auch wenn man den Prozeß, der zu $\overline{\mathfrak{m}}$ führt, in mehreren Schritten vollzieht.

Wir nehmen nun an, daß die beiden isomorphen Verbände $\mathfrak{M}$ und $\overline{\mathfrak{M}}$ Somenringe sind. Dann kann man die Paarung von $\mathfrak{m}$, durch welche $\mathfrak{M}$ erzeugt wird, mit Hilfe der relativ primen Elemente von geeigneten teilweisen Ordnungen von $\mathfrak{m}$ herstellen, und dasselbe gilt auch von $\overline{\mathfrak{m}}$. Dann wird mit Hilfe der Homomorphie, welche $\mathfrak{m}$ in $\overline{\mathfrak{m}}$ transformiert, auch die Menge der teilweisen Ordnungen von $\mathfrak{m}$, die soeben erwähnt wurden, auf die Menge der analogen teilweisen Ordnungen von $\overline{\mathfrak{m}}$ ebenfalls homomorph abgebildet, und durch diese Tatsache, verbunden mit dem im § 3 angegebenen Resultat, entstehen Zusammenhänge, welche der Leser am Ende dieser Arbeit zusammengestellt findet.

5. Gepaarte Mengen. In einer gepaarten Menge $\mathfrak{m}$ werden wir die Tatsache, daß die Elemente a und b konjugiert sind, durch das Symbol

$$a \circ b$$

ausdrücken, für welches selbstverständlich gilt:

(5. 1) Aus $a \circ b$ folgt $b \circ a$.

Wir werden zulassen, daß gewisse Elemente von $\mathfrak{m}$ zu sich selbst konjugiert sind; insbesondere soll mindestens ein Element o zu *allen* Elementen von $\mathfrak{m}$ (also auch zu sich selbst) konjugiert sein. Ein solches Element o kann immer der Menge $\mathfrak{m}$ hinzugefügt werden, falls es nicht von vornherein vorhanden sein sollte.

Die Teilmengen von $\mathfrak{m}$ werden wir mit kleinen Frakturbuchstaben $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, ..., $\mathfrak{x}$, ... bezeichnen. Speziell soll die Gesamtheit der Elemente von $\mathfrak{m}$, welche einem gegebenen Element x konjugiert wird, durch das Symbol

$$\mathfrak{c}(x)$$

dargestellt werden, welches wir die *charakteristische Funktion* der Paarung nennen wollen. Die Symmetrieeigenschaft (5. 1) kann jetzt geschrieben werden:

(5. 2) Aus $y \in \mathfrak{c}(x)$ folgt $x \in \mathfrak{c}(y)$.

Ist dann $\mathfrak{a}$ eine beliebige Teilmenge von $\mathfrak{m}$, so führen wir die Bezeichnung ein

(5. 3) $$\mathfrak{c}(\mathfrak{a}) = \prod_{x \in \mathfrak{a}} \mathfrak{c}(x),$$

d. h. $\mathfrak{c}(\mathfrak{a})$ soll der Durchschnitt aller Mengen $\mathfrak{c}(x)$ sein, wenn x die Menge $\mathfrak{a}$ durchläuft. Jede der Mengen $\mathfrak{c}(\mathfrak{a})$ enthält mindestens ein Element, nämlich das Element o; außerdem gilt die Behauptung:

(5. 4) Aus $\mathfrak{b} \subseteq \mathfrak{a}$ folgt $\mathfrak{c}(\mathfrak{a}) \subseteq \mathfrak{c}(\mathfrak{b})$.

6. Setzt man

(6. 1) $$\mathfrak{c}(\mathfrak{m}) = \mathfrak{n},$$

so besteht $\mathfrak{n}$ aus allen Elementen, welche — ebenso wie o — zu allen Elementen von $\mathfrak{m}$ konjugiert sind. Nach (5. 3) hat man dann

(6. 2) $$\mathfrak{c}(\mathfrak{n}) = \mathfrak{m};$$

außerdem folgt aus $\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{m}$ und (5. 4)

(6. 3) $$\mathfrak{n} \subseteq \mathfrak{c}(\mathfrak{a}).$$

Wir setzen jetzt

(6. 4) $$\mathfrak{a}' = \mathfrak{c}(\mathfrak{a}), \quad \mathfrak{a}'' = \mathfrak{c}(\mathfrak{a}') = \mathfrak{c}^2(\mathfrak{a}).$$

Ist dann x ein Element von $\mathfrak{a}$ und y ein Element von $\mathfrak{a}'$, so hat man nach (5. 3)

$$y \in \mathfrak{c}(x).$$

Wegen (5. 2) muß also

$$x \in \mathfrak{c}(y)$$

für alle Elemente y von $\mathfrak{a}'$ und für alle Elemente x von $\mathfrak{a}$ gelten, und daraus folgt

(6. 5) $$\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{c}(\mathfrak{a}') = \mathfrak{a}''.$$

7. Verbände. Eine Menge $\mathfrak{M}_0$ von Elementen $A, B, \ldots, X, Y, \ldots$ heißt ein vollständiger Verband, wenn

1. $\mathfrak{M}_0$ teilweise geordnet ist, doch so, daß

(7. 1) aus $A \subseteq B$ und $B \subseteq A$ folgt $A = B$.

2. jeder beliebigen Teilmenge $\{A_j\}$ von Elementen A_j aus $\mathfrak{M}_0$ zwei Elemente

(7. 2) $$D = \Pi A_j, \quad V = \Sigma \dot{+} A_j$$

zugeordnet werden können, von denen D das größte unter allen Elementen $E \subseteq A_j$ und V das kleinste unter allen Elementen $F \supseteq A_j$ bedeutet[1]).

[1]) Vgl. Enzyklopädie der mathem. Wissenschaften Bd. I, Algebra (2. Aufl.), I. Teil, **13**, Theorie der Verbände von H. HERMES und G. KÖTHE. S. 4.

Das Element D heißt der *Durchschnitt*, das Element V die Vereinigung aller Elemente A_j aus $\{A_j\}$. Insbesondere muß also jeder vollständige Verband notwendig ein größtes Element M und ein kleinstes Element O besitzen.

Selbstverständlich bilden die Teilmengen $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, ... einer gegebenen Menge $\mathfrak{m}$ immer einen voilständigen Verband $\mathfrak{M}_0$. Im folgenden werden wir das Wort „vollständig" weglassen, weil nur von vollständigen Verbänden die Rede sein wird und keine Verwechselung zu befürchten ist.

8. Wir wollen nun Abbildungsfunktionen

$$X' = F(X) \tag{8. 1}$$

betrachten, durch welche jedem Element X eines Verbandes $\mathfrak{M}_0$ ein Element X' desselben Verbandes zugeordnet wird. Diese Abbildungsfunktionen sollen ähnliche Eigenschaften besitzen, wie die charakteristische Funktion $\mathfrak{c}(\mathfrak{a})$ der Paarung einer Menge. Wir fordern also, daß mit der Bezeichnung

$$X'' = F(X') = F^2(X) \tag{8. 2}$$

die Relationen

$$\text{aus } X \subseteq Y \quad \text{folgt} \quad Y' \subseteq X', \tag{8. 3}$$

$$X \subseteq X'' \tag{8. 4}$$

immer erfüllt sein sollen, welche den Aussagen (5. 4) und (6. 5) nachgebildet sind.

Wendet man die Relation (8. 4) auf

$$X''' = F(X'') = F^2(X')$$

an, so erhält man

$$X' \subseteq X'''.$$

Setzt man aber in (8. 3) für Y das Element X'' ein, so findet man

$$X''' \subseteq X'$$

und es ist daher ganz allgemein

$$X' = X'''. \tag{8. 5}$$

9. Die Elemente von $\mathfrak{M}_0$, für welche — ebenso, wie für X' — die Gleichung

$$X = F^2(X) = X'' \tag{9. 1}$$

besteht, sollen die *normalen Elemente* der Abbildung (8. 1) genannt werden. Ist X ein normales Element, so gelten gleichzeitig die Beziehungen

$$X' = F(X) \quad X = F(X'). \tag{9. 2}$$

Wir bezeichnen mit $\mathfrak{M}$ die Gesamtheit der Elemente $X' = F(X)$, welche Bilder von Elementen aus $\mathfrak{M}_0$ sind. Die Gleichung (8. 5) besagt dann, daß jedes Element von $\mathfrak{M}$ normal ist, während aus der zweiten Gleichung (9. 2) folgt, daß jedes normale Element in $\mathfrak{M}$ enthalten ist.

Die Menge der normalen Elemente ist mit der Bildmenge $\mathfrak{M}$ identisch.

Aus (9. 2) folgt noch, daß die Menge $\mathfrak{M}$ der normalen Elemente auf sich selbst durch eine involutorische Transformation abgebildet wird.

10. Aus den Beziehungen

$$M \subseteq M'' \subseteq M$$

folgt, daß das „Einselement" M des Verbandes $\mathfrak{M}_0$ ein normales Element sein muß. Dagegen braucht das Nullelement O von $\mathfrak{M}_0$ nicht normal zu sein. Setzt man aber

$$N = F(M), \quad M = F(N), \tag{10. 1}$$

so folgt aus $O \subseteq N$ nach (8. 3)

$$M = F(N) \subseteq F(O) \subseteq M,$$

so daß man auch schreiben muß

$$F(O) = M, \quad F^2(O) = N. \tag{10. 2}$$

Ist X ein beliebiges normales Element, so folgt aus $X' \subseteq M$ und aus $X'' = X$

$$N = F(M) \subseteq F(X') = X.$$

Hieraus schließt man, daß N das kleinste und M das größte normale Element sind.

11. Es seien X und Y zwei beliebige Elemente von $\mathfrak{M}_0$, für welche man hat

$$X \subseteq Y;$$

dann folgen nacheinander aus (8. 3)

$$Y' \subseteq X', \quad X'' \subseteq Y''$$

und es gilt daher die Aussage:

$$\text{Aus } X \subseteq Y \text{ folgt } X'' \subseteq Y''. \tag{11. 1}$$

Ist nun Y ein normales Element, so hat man $Y'' = Y$ und $X'' \subseteq Y$: *Das Element X'' ist also das kleinste normale Element, welches X umfaßt.*

12. Wir setzen für eine beliebige Menge $\{X_j\}$ von normalen Elementen

$$D = \Pi X_j, \quad V = \Sigma \dot{+} X_j. \tag{12. 1}$$

Aus $D \subseteq X_j$ folgt $D'' \subseteq X_j'' = X_j$ und es ist also $D'' \subseteq D$. Andererseits muß nach (8. 4) auch $D \subseteq D''$ sein, so daß der Satz gilt

Satz 1. *Der Durchschnitt von beliebig vielen normalen Elementen ist normal.*

Dagegen braucht die Vereinigung schon von zwei normalen Elementen nicht normal zu sein. Es sei W ein normales Element, welches alle X_j umfaßt. Aus $X_j \subseteq W$ folgt $V \subseteq W$ und daher auch $V'' \subseteq W'' = W$.

Das Element V'' ist also das kleinste normale Element, welches alle X_j umfaßt. Da offenbar D das größte normale Element ist, welches alle X_j teilt, gilt der

Satz 2. *Die Menge $\mathfrak{M}$ der normalen Elemente bildet einen Verband mit dem Einselement M und dem Nullelement N.*

13. Die Vereinigung der Elemente X_j einer Menge $\{X_j\}$ von normalen Elementen ist eine Operation, welche verschiedene Bedeutungen hat, je nachdem man die X_j als Elemente des Verbandes $\mathfrak{M}_0$ oder als Elemente des Verbandes $\mathfrak{M}$ auffaßt. Deshalb ist es zweckmäßig, für die Elemente von $\mathfrak{M}$ neue Bezeichnungen zu wählen. Wir schreiben

$$X_j = \xi_j \tag{13. 1}$$

und erhalten nach den Resultaten des vorigen Paragraphen

$$\xi_j' = X_j', \quad \Pi\,\xi_j = \Pi X_j, \quad \Sigma\dot{+}\xi_j = (\Sigma\dot{+}X_j)'', \tag{13. 2}$$

$$(\Sigma\dot{+}\xi_j)' = (\Sigma\dot{+}X_j)'. \tag{13. 3}$$

Wir führen nun die Bezeichnungen ein:

$$\delta = \Pi\xi_j, \quad \varepsilon = (\Sigma\dot{+}\xi_j')'. \tag{13. 4}$$

Aus $\xi_j' \subseteq \Sigma\dot{+}\xi_j'$ folgt dann, weil die ξ_j normal sind, $\varepsilon \subseteq \xi_j$ und somit auch

$$\varepsilon \subseteq \delta.$$

Aus $\delta \subseteq \xi_j$ erhält man $\xi_j' \subset \delta'$ und $\Sigma\dot{+}\xi_j' \subseteq \delta'$ und daraus $\delta \subset \varepsilon$. Es gelten daher die Gleichungen

$$\delta = \varepsilon, \quad \delta' = \varepsilon', \tag{13. 5}$$

welche unter sich und mit jeder der beiden folgenden

$$(\Pi\xi_j)' = \Sigma\dot{+}\xi_j', \tag{13. 6}$$

$$(\Sigma\dot{+}\xi_j)' = \Pi\xi_j' \tag{13. 7}$$

äquivalent sind.

Da der Verband $\mathfrak{M}$ das Einselement $M = \mu$ und das Nullelement $N = \mu' = \nu$ besitzt, gelten ferner die Formeln

$$\begin{cases} \mu\dot{+}\xi = \mu, & \mu\xi = \xi, \\ \nu\dot{+}\xi = \xi, & \nu\xi = \nu, \end{cases} \tag{13. 8}$$

und man hat insbesondere

$$\mu\dot{+}\nu = \mu, \quad \mu\nu = \nu. \tag{13. 9}$$

14. Die Teilmengen einer Menge bilden selbstverständlich einen Verband. Unsere Resultate können daher auf die Teilmengen $\mathfrak{x}$ einer gepaarten Menge $\mathfrak{m}$ angewandt werden, wenn man an Stelle der Abbildungsfunktion $F(X)$ die charakteristische Funktion $\mathfrak{c}(\mathfrak{x})$ der Paarung wählt. Es wäre aber falsch zu

glauben, daß die Abbildungsfunktionen $F(X)$, welche den Bedingungen (8.3) und (8.4) genügen, wesentlich allgemeiner seien als die charakteristischen Funktionen einer Paarung.

Wenn man nämlich (8.3) und (8.4) benutzt, so folgt aus $Y \subseteq X'$ die Relation $X \subseteq X'' \subseteq Y'$. Wir können also die Menge $\mathfrak{M}_0$ dadurch paaren, daß wir $X \circ Y$ schreiben, falls $Y \subseteq X'$ ist. Die charakteristische Funktion $\mathfrak{c}(X)$ dieser Paarung erhält man dann durch die Aussage

$$Y \in \mathfrak{c}(X), \quad \text{falls } Y \subseteq X'. \tag{14.1}$$

Ist jetzt $\mathfrak{a}$ irgendeine Menge $\{X_j\}$ von Elementen X_j, so muß man nach (5.3) setzen

$$\mathfrak{c}(\mathfrak{a}) = \prod_{X_j \in \mathfrak{a}} \mathfrak{c}(X_j). \tag{14.2}$$

Wir schreiben nun

$$V = \Sigma \dot{+} X_j. \tag{14.3}$$

Nach (14.2) folgt dann aus $Y \in \mathfrak{c}(\mathfrak{a})$ die Relation $Y \in \mathfrak{c}(X_j)$ oder $Y \subseteq X_j'$. Dann ist aber auch $X_j \subseteq Y'$ und somit auch $V \subseteq Y'$ oder $Y \subseteq V'$. Aus $Y \in \mathfrak{c}(\mathfrak{a})$ folgt also $Y \in \mathfrak{c}(V)$. Umgekehrt sei $Y \in \mathfrak{c}(V)$ oder $Y \subseteq V'$. Da aus $X_j \subseteq V$ folgt $V' \subseteq X_j'$, ist also auch $Y \subseteq X_j'$ oder $Y \in \mathfrak{c}(X_j)$. Letzteres gilt für alle X_j und man hat schließlich $Y \in \mathfrak{c}(\mathfrak{a})$. Es gilt somit die Gleichung

$$\mathfrak{c}(\mathfrak{a}) = \mathfrak{c}(V),$$

und wir finden insbesondere, daß alle normalen Teilmengen $\mathfrak{c}(\mathfrak{a})$ von $\mathfrak{M}_0$ in der Gestalt $\mathfrak{c}(X)$ geschrieben werden können; wegen (14.1) sind die beiden Funktionen $\mathfrak{c}(X)$ und $F(X)$ aufs engste verwandt.

15. Somenringe. Ein Ring $\mathfrak{R}$ von Elementen $A, B, \ldots$ mit der Summenoperation $A \dot{+} B$, der Produktoperation AB und dem Nullelement O heißt eine *Boolesche Algebra*, wenn die Gleichung

$$XX = X, \tag{15.1}$$

welche die andere

$$X \dot{+} X = O \tag{15.2}$$

nach sich zieht, allgemein gilt. Eine Boolesche Algebra ist notwendig immer ein kommutativer Ring.

Durch die Gleichung

$$A \dot{+} B = A \dot{+} B \dot{+} AB \tag{15.3}$$

wird die „Vereinigung" $A \dot{+} B$ der Elemente A und B definiert; diese Operation ist kommutativ, assoziativ und distributiv.

Der Boolesche Ring $\mathfrak{R}$ wird dadurch teilweise geordnet, daß man

$$A \subseteq B \tag{15.4}$$

schreibt, wenn mindestens eine der beiden Gleichungen

(15. 5) $$AB = A, \quad A \dot{+} B = B$$

(und dann notwendig auch die andere) erfüllt ist.

Eine Boolesche Algebra, bei welcher die Operation

$$\Sigma \dot{+} A_j$$

und dann auch die Operation

$$\Pi A_j$$

auch für unendlich viele Elemente erklärt ist, heißt ein Somenring.

16. Man beweist, daß ein Verband $\mathfrak{M}$ mit den Elementen $\alpha, \beta, \ldots$, von denen μ das größte und ν das kleinste ist, dann und nur dann ein Somenring ist, wenn erstens zwischen den Operationen $\alpha \dot{+} \beta$ und $\alpha\beta$ das distributive Gesetz

(16. 1) $$\gamma(\alpha \dot{+} \beta) = \gamma\alpha \dot{+} \gamma\beta$$

gilt, und wenn zweitens jedem Element α von $\mathfrak{M}$ mindestens ein komplementäres Element α' zugeordnet werden kann, für welches die Gleichungen

(16. 2) $$\alpha \dot{+} \alpha' = \mu, \quad \alpha\alpha' = \nu$$

bestehen.

Wir aber werden ein ganz anders geartetes Kriterium für dieselbe Tatsache zu benutzen haben. Unter der Voraussetzung, daß ein Verband $\mathfrak{M}$ ein Somenring ist, wird das zu α komplementäre Element α' nämlich durch die Gleichung

(16. 3) $$\alpha' = \mu \dot{+} \alpha$$

definiert. Aus der Gleichung

$$\alpha'' = \mu \dot{+} \alpha' = \mu \dot{+} \mu \dot{+} \alpha = \alpha$$

folgt, daß der Übergang von α zu seinem Komplement α' eine involutorische Selbstabbildung von $\mathfrak{M}$ darstellt.

Ferner entnimmt man aus der Gleichung

$$\alpha\beta' = \alpha(\mu \dot{+} \beta) = \alpha \dot{+} \alpha\beta,$$

daß jede der Gleichungen $\alpha\beta = \nu$, $\alpha\beta' = \alpha$ aus der anderen folgt. Da aus $\alpha\beta = \nu$ auch $\beta\alpha' = \beta$ folgt, sehen wir schließlich, daß sogar aus jeder der Gleichungen $\alpha\beta = \nu$, $\alpha\beta' = \alpha$, $\beta\alpha' = \beta$ die beiden anderen folgen.

17. Die zuletzt abgeleiteten Eigenschaften eines Somenringes, der zugleich ein Verband ist, sollen nun umgekehrt werden, indem wir beweisen:

Satz 3. *Es gibt höchstens eine involutorische Selbstabbildung*

(17. 1) $$\xi' = F(\xi), \quad \xi = F(\xi')$$

eines Verbandes $\mathfrak{M}$ mit dem Nullelement ν, für welche die Aussage besteht:

(17. 2) Aus jeder der Gleichungen $\xi\eta = \nu$, $\xi\eta' = \xi$, $\eta\xi' = \eta$ folgen jeweils die beiden anderen.

Und zwar ist eine derartige Abbildung dann und nur dann möglich, wenn der Verband $\mathfrak{M}$ ein Somenring ist. Die Abbildung (17. 1) *stellt dann den Übergang von einem Soma zu seinem Komplement dar.*

Der vorige Paragraph enthält schon den Beweis der einen Hälfte unseres Satzes. Wir brauchen also nur noch zu zeigen, daß ein Verband $\mathfrak{M}$, für welchen (17. 1) und (17. 2) bestehen, ein Somenring ist.

Wir setzen zuerst $\eta = \xi'$; dann ist

$$\eta\xi' = \xi'\xi' = \xi' = \eta$$

und folglich hat man wegen (17. 2) ganz allgemein

$$\xi\xi' = \nu. \tag{17. 3}$$

Wird nun durch die Gleichungen

$$\bar{\xi} = G(\xi), \quad \xi = G(\bar{\xi}) \tag{17. 4}$$

eine zweite involutorische Selbstabbildung von $\mathfrak{M}$ bezeichnet, für welche aus jeder der Gleichungen

$$\xi\eta = \nu, \quad \xi\bar{\eta} = \xi, \quad \eta\bar{\xi} = \eta \tag{17. 5}$$

die beiden anderen folgen, so hat man ebenfalls

$$\xi\bar{\xi} = \nu. \tag{17. 6}$$

Nun folgt erstens aus (17. 6) und (17. 2) die Relation $\xi'\bar{\xi} = \bar{\xi}$ und zweitens aus (17. 3) und (17. 5) die Relation $\xi'\bar{\xi} = \xi'$. Es muß also

$$\xi' = \bar{\xi}$$

sein, womit die Eindeutigkeit der Selbstabbildung (17. 1) bewiesen ist.

18. Ersetzt man in (17. 2) das Element η durch ζ', so kann diese Aussage durch folgende ihr äquivalente ersetzt werden:

(18. 1) Aus jeder der Relationen $\xi \subseteq \zeta$, $\zeta' \subseteq \xi'$, $\xi\zeta' = \nu$ folgen die beiden anderen.

Insbesondere sehen wir hieraus, daß die Selbstabbildung (17. 1) den Bedingungen genügt, durch welche wir die normalen Elemente eines Verbandes definiert haben, und daraus folgt, daß auch hier die Gleichungen (13. 6) bis (13. 8) gelten müssen.

Aus $\xi = \alpha\beta$ folgt also $\xi' = (\alpha' \dot{+} \beta')$ und nach (17. 3)

$$\alpha\beta(\alpha' \dot{+} \beta') = \nu. \tag{18. 2}$$

Wegen (18. 1) ist also

$$\alpha(\alpha' \dot{+} \beta') \subseteq \beta'. \tag{18. 3}$$

Ebenso gilt für ein drittes Element γ die Relation

$$\alpha(\alpha' \dot{+} \gamma') \subseteq \gamma'. \tag{18. 4}$$

Durch Vergleichung von (18. 3) mit (18. 4) erhält man jetzt

$$\alpha\,(\alpha' \dot{+} \beta')\,(\alpha' \dot{+} \gamma') \subseteq \beta'\gamma',$$

und durch eine neue Anwendung von (18. 1)

(18. 5) $$\alpha\,(\beta \dot{+} \gamma)\,(\alpha' \dot{+} \beta')\,(\alpha' \dot{+} \gamma') = v.$$

Nun ist aber

$$(\alpha\beta \dot{+} \alpha\gamma)' = (\alpha' \dot{+} \beta')\,(\alpha' \dot{+} \gamma'),$$

so daß man aus (18. 5) erhält.

(18. 6) $$\alpha\,(\beta \dot{+} \gamma) \subseteq \alpha\beta \dot{+} \alpha\gamma.$$

Andererseits gelten die Beziehungen

$$\alpha\beta \subseteq \alpha\,(\beta \dot{+} \gamma), \quad \alpha\gamma \subseteq \alpha\,(\beta \dot{+} \gamma),$$

aus denen man schließt

(18. 7) $$\alpha\beta \dot{+} \alpha\gamma \subseteq \alpha\,(\beta \dot{+} \gamma),$$

und die Vergleichung von (18. 6) und (18. 7) zeigt, daß das distributive Gesetz

(18. 8) $$\alpha\,(\beta \dot{+} \gamma) = \alpha\beta \dot{+} \alpha\gamma$$

für unseren Verband $\mathfrak{M}$ allgemein besteht.

19. Um jetzt zu zeigen, daß $\mathfrak{M}$ ein Somenring ist, definieren wir eine neue Operation $\alpha \dot{+} \beta$ durch die Gleichung

(19. 1) $$\alpha \dot{+} \beta = \alpha\beta' \dot{+} \beta\alpha'$$

und bemerken, daß die Beziehungen gelten

(19. 2) $$\alpha \dot{+} \beta = \beta \dot{+} \alpha,$$

(19. 3) $$\alpha \dot{+} v = \alpha\mu \dot{+} v\alpha' = \alpha,$$

(19. 4) $$\alpha \dot{+} \mu = \alpha v \dot{+} \mu\alpha' = \alpha'.$$

Mit Hilfe der Formeln des § 13 erhält man aus (19. 1)

$$(\alpha \dot{+} \beta)' = (\alpha' \dot{+} \beta)\,(\beta' \dot{+} \alpha)$$

und hieraus mit Benutzung von (18. 8) und (17. 3)

(19. 5) $$(\alpha \dot{+} \beta)' = \alpha\beta \dot{+} \alpha'\beta'.$$

Man hat also

$$\begin{aligned} \alpha \dot{+} (\beta \dot{+} \gamma) &= \alpha\,(\beta \dot{+} \gamma)' \dot{+} \alpha'\,(\beta \dot{+} \gamma) \\ &= \alpha\,(\beta\gamma \dot{+} \beta'\gamma') \dot{+} \alpha'\,(\beta\gamma' \dot{+} \beta'\gamma) \\ &= \alpha\beta\gamma \dot{+} \alpha\beta'\gamma' \dot{+} \alpha'\beta\gamma' \dot{+} \alpha'\beta'\gamma, \end{aligned}$$

und da der letzte Ausdruck auf der rechten Seite symmetrisch in α, β und γ ist, schließt man daraus

(19. 6) $$\alpha \dot{+} (\beta \dot{+} \gamma) = (\alpha \dot{+} \beta) \dot{+} \gamma.$$

Ganz ähnlich beweist man das distributive Gesetz für $\alpha \dot{+} \beta$ mit Hilfe der Rechnung

(19. 7)
$$\begin{aligned} \alpha\gamma \dot{+} \beta\gamma &= \alpha\gamma\,(\beta\gamma)' \dot{+} \beta\gamma\,(\alpha\gamma)' \\ &= \alpha\gamma\,(\beta' \dot{+} \gamma') \dot{+} \beta\gamma\,(\alpha' \dot{+} \gamma') \\ &= \gamma\,(\alpha\beta' \dot{+} \beta\alpha') \\ &= \gamma\,(\alpha \dot{+} \beta). \end{aligned}$$

Endlich bestehen auch die Gleichungen

(19. 8)
$$\alpha \dot{+} \alpha = \alpha\alpha' \dot{+} \alpha'\alpha = \nu,$$

(19. 9)
$$\alpha \dot{+} \beta \dot{+} \alpha\beta = \alpha \dot{+} \beta,$$

mit deren Hilfe der Beweis des Satzes 3 zu Ende geführt wird.

Als Korollar dieses Satzes erhält man sofort auch den

Satz 4. *Der im* § 12 *definierte involutorische Verband* $\mathfrak{M}$ *der normalen Elemente von* $\mathfrak{M}_0$ *ist dann und nur dann ein Somenring, bei welchem die konjugierten Elemente des Verbandes komplementäre Somen sind, wenn die Aussage besteht:*

(19. 10) Aus $\xi\eta = \nu$ folgt $\xi \subseteq \eta'$ und umgekehrt.

20. Teilweise geordnete Mengen. Ehe wir eine merkwürdige Anwendung der bisherigen Resultate besprechen, müssen wir die teilweise geordneten Mengen näher betrachten.

Eine gepaarte Menge heißt teilweise geordnet, wenn erstens zwischen je zwei konjugierten Elementen a, b von $\mathfrak{m}$ mindestens eine der beiden Reihenfolgen dieser Elemente ausgezeichnet ist, oder was in anderer Bezeichnung auf dasselbe hinauskommt, wenn mindestens eine der „Bindungen"

(20. 1)
$$a \subseteq b, \quad b \subseteq a$$

vorhanden ist, und wenn zweitens noch folgende Aussagen erfüllt sind:

(20. 2) Für alle Elemente x von $\mathfrak{m}$ ist $x \subseteq x$,

(20. 3) aus $x \subseteq y$ und $y \subseteq z$ folgt $x \subseteq z$.

Manche Autoren fügen dieser Definition noch eine der Forderung (7. 1) für Verbände analoge Forderung hinzu. Wir wollen aber hier ausdrücklich zulassen, daß die beiden Bindungen (20. 1) auch zwischen *verschiedenen* Elementen a, b gleichzeitig vorhanden sein dürfen und dann sagen, daß zwischen a und b eine *Doppelbindung* existiert.

Beliebige Mengen von Bindungen werden im folgenden durch große, fette lateinische Buchstaben A, B, ... bezeichnet, so daß wir jede gegebene teilweise Ordnung der Menge $\mathfrak{m}$ auch durch das Symbol $\mathfrak{m}(\mathsf{A})$ beschreiben werden.

21. Wir bezeichnen mit A die (transitive) Menge von Bindungen, welche eine teilweise Ordnung $\mathfrak{m}(\mathsf{A})$ bestimmen, und mit B irgendeine weitere Menge von Bindungen. Gibt es eine kleinste transitive Menge von Bindungen $\mathsf{C} \supseteq \mathsf{A} \dot{+} \mathsf{B}$, so wollen wir sagen, daß die teilweise Ordnung $\mathfrak{m}(\mathsf{C})$ aus $\mathfrak{m}(\mathsf{A})$ durch *Adjunktion* der Bindungen B entstanden ist.

Es sei $\{\mathsf{B}_i\}$ eine (nicht notwendig abzählbare) Menge von Bindungsmengen B_i, welche man einzeln zu A adjungieren kann. Ist dann immer mit irgend zwei Mengen B_j und B_k eine dritte Menge B_m in $\{\mathsf{B}_i\}$ vorhanden, welche alle Bindungen von B_j und alle Bindungen von B_k enthält, so kann man auch die Vereinigung $\mathsf{B} = \Sigma \dot{+} \mathsf{B}_i$ zu A adjungieren. Bezeichnet man nämlich mit C_i das Resultat der Adjunktion von B_i zu A und setzt $\mathsf{C} = \Sigma \dot{+} \mathsf{C}_i$, so ist C die kleinste transitive Menge von Bindungen, welche alle Bindungen von A und alle Bindungen von B enthält.

Andererseits kann man immer jede einzelne Bindung

$$a \subseteq b \tag{21. 1}$$

zu A adjungieren. Die kleinste transitive Menge C von Bindungen, welche außer den Bindungen A auch die Bindung (21. 1) enthält, erhält man, indem man zu A noch alle Bindungen

$$x \subseteq y$$

hinzufügt, für welche die Bindungen $x \subset a$ und $b \subset y$ in A enthalten sind.

22. Man kann jetzt zeigen, daß man jede beliebige Menge B von Bindungen zu A adjungieren kann. Es sei nämlich B wohlgeordnet. Jedem Element ξ von B ordnen wir diejenige Teilmenge B_ξ von B zu, welche aus allen Elementen von B besteht, die bei der Wohlordnung dem Elemente ξ vorangehen. Wir zeigen erstens, daß man jede der Teilmengen B_ξ zu A adjungieren kann. Ist dies nämlich nicht der Fall, so gibt es eine erste Teilmenge B_{ξ_0}, welche man nicht zu A adjungieren kann. Hierbei kann ξ_0 nicht das erste Element von B sein, und es gibt Elemente η von B, welche dem Elemente ξ_0 vorangehen. Jedes B_η kann man nach Voraussetzung zu A adjungieren und nach dem letzten Paragraphen kann man auch die Vereinigung aller B_η zu A adjungieren. Nun ist aber diese Vereinigung (höchstens mit Ausnahme des letzten Elementes von B_{ξ_0}, falls es ein solches gibt) mit B_{ξ_0} identisch. Wir schließen daraus, daß wir entgegen unserer Voraussetzung auch B_{ξ_0} zu A adjungieren können, und dies sowohl, wenn B_{ξ_0} kein letztes Element besitzt, als auch in dem Fall, daß ein letztes Element von B_{ξ_0} vorhanden ist.

Benutzt man jetzt, daß alle B_ξ zu A adjungiert werden können, so erhält man durch dieselbe Schlußweise das Resultat, daß auch B selbst zu A adjungiert werden kann.

23. Die Paarungen von relativ primen Elementen teilweise geordneter Mengen. Wir werden im folgenden nur solche teilweise geordneten Mengen $\mathfrak{m}(\mathsf{A})$ betrachten, welche mindestens ein kleinstes Element o enthalten. Dann müssen für alle Elemente x aus $\mathfrak{m}$ die Bindungen $o \subseteq x$ in A enthalten sein. Wir bezeichnen ferner mit $\mathfrak{n}$ die Gesamtheit der Elemente y, für welche $y \subseteq o$ in A enthalten ist.

Sind jetzt a und b beliebige Elemente von $\mathfrak{m}$, so ist jedes Element y von $\mathfrak{n}$ ein gemeinsamer Teil von a und b. Sind umgekehrt alle gemeinsamen Teile von a und b in $\mathfrak{n}$ enthalten, so sollen a und b *relativ prim zueinander* genannt werden.

Durch die Bestimmung ihrer relativ primen Elemente wird nun die Menge $\mathfrak{m}$ *gepaart*, wobei insbesondere die Elemente aus $\mathfrak{n}$ die einzigen sind, welche zu allen Elementen aus $\mathfrak{m}$ konjugiert sind. Bei dieser Paarung hat also die Menge $\mathfrak{n}$ dieselbe Bedeutung wie zuvor.

Für die relativ primen Elementenpaare einer teilweise geordneten Menge bestehen nun folgende Aussagen:

(23. 1) Aus $x \circ x$ folgt $x \in \mathfrak{n}$,

(23. 2) aus $y \subseteq x$ und $x \circ a$ folgt $y \circ a$,

durch welche die charakteristische Funktion $\mathfrak{c}(\mathfrak{x})$ der Paarung spezialisiert wird. Da nämlich die Relation $x \in \mathfrak{c}(\mathfrak{a})$ bedeutet, daß alle Elemente z von $\mathfrak{a}$ zu x konjugiert sind, so folgt aus (23. 2):

(23. 3) Aus $y \subseteq x$ und $x \in \mathfrak{c}(\mathfrak{a})$ folgt $y \in \mathfrak{c}(\mathfrak{a})$.

Die normalen Teilmengen $\mathfrak{c}(\mathfrak{a})$ von $\mathfrak{m}$ sind also *vollständig*[2]).

Es seien jetzt $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ normale Teilmengen von $\mathfrak{m}$, und x sei ein Element von $\mathfrak{a}$, welches nicht zu allen Elementen von $\mathfrak{b}$ relativ prim ist. Dann gibt es nach Voraussetzung mindestens ein Element x_1 von $\mathfrak{b}$, welches mit x einen gemeinsamen Teil y besitzt, der nicht in $\mathfrak{n}$ enthalten ist. Da nun $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ vollständige Teilmengen von $\mathfrak{m}$ sind, muß y sowohl in $\mathfrak{a}$, als auch in $\mathfrak{b}$, also auch in $\mathfrak{ab}$ enthalten sein.

Ist also $\mathfrak{ab} = \mathfrak{n}$, so muß jedes Element x von $\mathfrak{a}$ zu allen Elementen von $\mathfrak{b}$ relativ prim sein, d. h. man hat $\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{c}(\mathfrak{b})$. Ist umgekehrt $\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{c}(\mathfrak{b})$, so muß jedes Element x von $\mathfrak{ab}$ sowohl in $\mathfrak{b}$ als auch in $\mathfrak{c}(\mathfrak{b})$ enthalten sein, so daß man $x \circ x$ hat. Nach (23. 1) ist also $x \in \mathfrak{n}$ und folglich muß $\mathfrak{ab} = \mathfrak{n}$ sein.

Das Kriterium des Satzes 4 des § 19 ist also hier erfüllt, und der Verband $\mathfrak{M}$, welcher von den normalen Teilmengen von $\mathfrak{m}$ gebildet ist, muß deshalb ein Somenring sein.

---

[2]) Eine Teilmenge $\mathfrak{x}$ von $\mathfrak{m}$ heißt bekanntlich vollständig, wenn mit $x \in \mathfrak{x}$ und $y \subseteq x$ immer auch $y \in \mathfrak{x}$ ist.

24. Ehe wir die Umkehrung des letzten Resultates aufstellen, beweisen wir noch den

Satz 5. *Bei einer gepaarten Menge* $\mathfrak{m}$ *besteht dann und nur dann für die normalen Teilmengen* $\alpha, \beta, \ldots$ *von* $\mathfrak{m}$ *die Aussage:*

(24. 1) Aus $\alpha\beta = \mathfrak{n}$ folgt jeweils $\alpha \subseteq \mathfrak{c}(\beta)$ und umgekehrt,

wenn für die Elemente $a, b, \ldots$ *von* $\mathfrak{m}$ *die Aussage besteht:*

(24. 2) Aus $\mathfrak{c}^2(a)\,\mathfrak{c}^2(b) = \mathfrak{n}$ folgt jeweils $a \circ b$ und umgekehrt.

Wir nehmen erstens an, (24. 1) sei erfüllt. Aus $\mathfrak{c}^2(a)\,\mathfrak{c}^2(b) = \mathfrak{n}$ folgt dann

$$\mathfrak{c}^2(a) \subseteq \mathfrak{c}^3(b) = \mathfrak{c}(b),$$

und da $a \in \mathfrak{c}^2(a)$ ist, muß $a \in \mathfrak{c}(b)$ oder $a \circ b$ sein. Umgekehrt folgen aus $a \circ b$ nacheinander

$$a \in \mathfrak{c}(b), \quad \mathfrak{c}^2(a) \subseteq \mathfrak{c}^3(b)$$

und mit Benutzung von (24. 1)

$$\mathfrak{c}^2(a)\,\mathfrak{c}^2(b) = \mathfrak{n}.$$

Also ist (24. 2) eine Folge von (24. 1).

Zweitens nehmen wir an, daß (24. 2) gelten soll und daß α, β normale Teilmengen von $\mathfrak{m}$ sind, für welche $\alpha\beta = \mathfrak{n}$ ist. Es sei x ein Element von α und y ein Element von β. Aus

$$\mathfrak{c}^2(x) \subseteq \alpha, \quad \mathfrak{c}^2(y) \subseteq \beta. \quad \alpha\beta = \mathfrak{n}$$

folgt $\mathfrak{c}^2(x)\,\mathfrak{c}^2(y) = \mathfrak{n}$ und nach (24. 2)

$$x \circ y.$$

Daher hat man $x \in \mathfrak{c}(y)$ für alle $y \in \beta$; aus

$$\mathfrak{c}(\beta) = \prod_{y \in \beta} \mathfrak{c}(y)$$

folgt dann $x \in \mathfrak{c}(\beta)$ für alle $x \in \alpha$ und schließlich

$$\alpha \subseteq \mathfrak{c}(\beta).$$

Umgekehrt sei $\alpha \subseteq \mathfrak{c}(\beta)$ und x sei ein Element von $\alpha\beta$. Man hat dann

$$x \in \beta, \quad x \in \alpha \subseteq \mathfrak{c}(\beta) \subseteq \mathfrak{c}(x)$$

und daraus folgt $x \circ x$. Nach (24. 2) muß dann $\mathfrak{c}^2(x) = \mathfrak{n}$ und $x \in \mathfrak{n}$ sein. Es folgt schließlich $\alpha\beta = \mathfrak{n}$ und hiermit ist gezeigt, daß auch (24. 1) eine Folge von (24. 2) ist. Der behauptete Satz ist deshalb richtig.

25. Wir nehmen jetzt an, wir hätten eine Paarung der Menge $\mathfrak{m}$ gefunden, für welche die eine und dann auch die andere der äquivalenten Forderungen (24. 1) und (24. 2) gilt.

Die Menge $\mathfrak{m}$ wird teilweise geordnet, wenn wir Bindungen nach folgender Regel einführen:

(25. 1) Es soll $a \subseteq b$ dann und nur dann gesetzt werden, wenn $\mathfrak{c}^2(a) \subseteq \mathfrak{c}^2(b)$ ist.

Nach dieser Regel ist ein Element x dann und nur dann gemeinsamer Teil von a und b, wenn

$$\mathfrak{c}^2(x) \subseteq \mathfrak{c}^2(a)\,\mathfrak{c}^2(b) \tag{25. 2}$$

ist. Da nun x in $\mathfrak{c}^2(x)$ enthalten ist, muß auch

$$x \in \mathfrak{c}^2(a)\,\mathfrak{c}^2(b) \tag{25. 3}$$

sein, und umgekehrt folgt (25. 2) aus (25. 3), weil $\mathfrak{c}^2(a)\,\mathfrak{c}^2(b)$ eine normale Teilmenge von $\mathfrak{m}$ ist. Die Menge der gemeinsamen Teile von a und b ist also mit $\mathfrak{c}^2(a)\,\mathfrak{c}^2(b)$ identisch, und a, b sind dann und nur dann relativ prim, wenn $\mathfrak{c}^2(a)\,\mathfrak{c}^2(b) = \mathfrak{n}$ ist, oder, da (24. 2) gelten muß, wenn $a \circ b$ ist.

Die konjugierten Elemente der gegebenen Paarung sind also gleichzeitig auch die relativ primen Elemente der durch (25. 1) definierten teilweisen Ordnung von $\mathfrak{m}$. Nun muß aber auch (24. 1) gelten, und nach dem Satz 4 des § 19 ist der Verband $\mathfrak{M}$ der normalen Teilmengen von $\mathfrak{m}$ ein Somenring. Die übrigen Behauptungen des folgenden Satzes werden ganz ähnlich aus unseren Resultaten abgeleitet.

Satz 6. *Eine Paarung einer Menge $\mathfrak{m}$ sei vorgegeben, für welche mindestens eine der drei folgenden Behauptungen zutrifft:*

a) Die konjugierten Elemente der Paarung können als relativ prime Elemente einer geeigneten teilweisen Ordnung von $\mathfrak{m}$ gedeutet werden.

b) Der Verband $\mathfrak{M}$ der normalen Teilmengen von $\mathfrak{m}$ bildet einen Somenring.

c) Aus $a \circ b$ folgt $\mathfrak{c}^2(a)\,\mathfrak{c}^2(b) = \mathfrak{n}$ und umgekehrt.

Dann bestehen gleichzeitig alle drei Behauptungen.

26. Nach dem letzten Satz erzeugen die relativ primen Elemente einer beliebigen teilweisen Ordnung $\mathfrak{m}(\mathsf{A})$ von $\mathfrak{m}$ eine Paarung dieser Menge, für welche die Aussagen (24. 1) und (24. 2) bestehen. Geht man nun von dieser Paarung aus, und führt man die Bindungen (25. 1) ein, so erhält man eine neue teilweise Ordnung $\mathfrak{m}(\mathsf{A}^*)$ von $\mathfrak{m}$, für welche die relativ primen Elemente dieselben sind wie für $\mathfrak{m}(\mathsf{A})$.

Ist nun $a \subseteq b$ eine Bindung von A, so ist jedes Element x, welches bei der teilweisen Ordnung $\mathfrak{m}(\mathsf{A})$ relativ prim zu b ist, auch relativ prim zu a, und diese Tatsache wird durch die Relation $\mathfrak{c}(b) \subseteq \mathfrak{c}(a)$ und daher auch durch die Relation

$$\mathfrak{c}^2(a) \subseteq \mathfrak{c}^2(b)$$

ausgedrückt. Also muß nach (25. 1) die Bindung $a \subseteqq b$ in A^* vorkommen und man hat jedenfalls

(26. 1) $$\mathsf{A} \subseteqq \mathsf{A}^*.$$

Schon die einfachsten Beispiele lehren, daß unter Umständen nicht alle Bindungen von A^* in A enthalten zu sein brauchen, und daß folglich verschiedene teilweise Ordnungen von $\mathfrak{m}$ zu derselben Paarung der relativ primen Elemente führen können.

Wird nun durch Adjunktion einer beliebigen Menge B von Bindungen die teilweise Ordnung $\mathfrak{m}(\mathsf{A})$ in eine teilweise Ordnung $\mathfrak{m}(\mathsf{A}_1)$ übergeführt, so kann zweierlei vorkommen. Erstens kann die kleinste normale Menge $\mathfrak{n}$ in eine Menge $\mathfrak{n}_1$ übergehen, welche *mehr* Elemente als $\mathfrak{n}$ besitzt. Ist aber zweitens $\mathfrak{n}_1 = \mathfrak{n}$, so müssen je zwei Elemente x, y, welche relativ prim für die Ordnung $\mathfrak{m}(\mathsf{A}_1)$ sind, ebenfalls zueinander relativ prim für die Ordnung $\mathfrak{m}(\mathsf{A})$ sein und die Menge der zueinander relativ primen Elementenpaare wird beim Übergang von $\mathfrak{m}(\mathsf{A})$ zu $\mathfrak{m}(\mathsf{A}_1)$ nicht vermehrt.

Ist also insbesondere

$$\mathsf{A} \subset \mathsf{A}_1 \subset \mathsf{A}^*,$$

so muß $\mathfrak{n} \subseteqq \mathfrak{n}_1 \subseteqq \mathfrak{n}^*$ sein, und wegen $\mathfrak{n}^* = \mathfrak{n}$ ist auch $\mathfrak{n}_1 = \mathfrak{n}$. Hieraus schließt man, daß die Paarung der relativ primen Elemente für A, A_1 und A^* dieselbe sein muß. Zu den Bindungen der teilweisen Ordnung $\mathfrak{m}(\mathsf{A}^*)$ kann man dagegen keine einzige neue adjungieren, ohne daß die kleinste normale Menge $\mathfrak{n}$ durch eine umfassendere ersetzt wird, oder, falls $\mathfrak{n}$ unverändert bleibt, ohne daß gewisse Paare von relativ primen Elementen verlorengehen. Unter den teilweisen Ordnungen, deren relativ prime Elemente dieselbe Paarung von $\mathfrak{m}$ erzeugen, gibt es also eine ausgezeichnete, welche dadurch charakterisiert ist, daß sie die umfassendste Menge von Bindungen enthält.

Eine teilweise Ordnung von $\mathfrak{m}$, welche diese letzte Eigenschaft besitzt, soll *gesättigt* genannt werden.

27. Die reduzierten Paarungen einer Menge. Die Elemente $a, b, \ldots, x, \ldots$ einer Menge $\mathfrak{m}$ fassen wir zu Klassen $\bar{a}, \bar{b}, \ldots, \bar{x}, \ldots$ zusammen und erhalten eine Menge $\overline{\mathfrak{m}}$ dieser Klassen, deren Untermengen wir mit $\bar{\mathfrak{a}}, \bar{\mathfrak{b}}, \ldots$ bezeichnen. Jede Teilmenge $\bar{\mathfrak{a}}$ von $\overline{\mathfrak{m}}$ kann als eine Teilmenge von $\mathfrak{m}$ aufgefaßt werden. Dafür aber, daß eine Teilmenge $\mathfrak{a}$ von $\mathfrak{m}$ auch als Teilmenge von $\overline{\mathfrak{m}}$ darstellbar sei, muß $\mathfrak{a}$ mit jedem Element einer Klasse auch alle übrigen Elemente derselben Klasse enthalten, d. h. $\mathfrak{a}$ muß eine *Klassenmenge* sein.

Hat man also eine spezielle Menge $\mathfrak{M}$ von Teilmengen $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \ldots$ von $\mathfrak{m}$ irgendwie definiert, so kann man die Frage stellen, ob *überhaupt* die Elemente von $\mathfrak{m}$ so auf Klassen $\bar{a}, \bar{b}, \ldots$ verteilt werden können, daß jedes der Elemente $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \ldots$ von $\mathfrak{M}$ eine Klassenmenge wird.

Diese Frage ist sofort zu beantworten, wenn $\mathfrak{M}$ der Verband der normalen Teilmengen von $\mathfrak{m}$ bei einer beliebig vorgegebenen Paarung ist. Für zwei Elemente x, y von $\mathfrak{m}$ sei nämlich $\mathfrak{c}(x) \neq \mathfrak{c}(y)$, so daß z. B. ein Element z von $\mathfrak{m}$ in $\mathfrak{c}(x)$, aber nicht in $\mathfrak{c}(y)$ enthalten ist. Aus $z \in \mathfrak{c}(x)$ folgt dann $x \in \mathfrak{c}(z)$; dagegen kann y kein Element von $\mathfrak{c}(z)$ sein, weil dann entgegen der Voraussetzung $z \in \mathfrak{c}(y)$ wäre. Sind dagegen x und y Elemente, für welche $\mathfrak{c}(x) = \mathfrak{c}(y)$ ist, und bedeutet α eine normale Teilmenge von $\mathfrak{m}$, welche x enthält, so hat man

$$\mathfrak{c}(\alpha) \subseteq \mathfrak{c}(x) = \mathfrak{c}(y)$$

und folglich

$$\mathfrak{c}^2(y) \subseteq \mathfrak{c}^2(\alpha) = \alpha.$$

Also muß α auch das Element y enthalten, und es gilt der

Satz 7. *Bei einer Einteilung der Elemente einer gepaarten Menge in Klassen sind dann und nur dann sämtliche normalen Teilmengen von* $\mathfrak{m}$ *auch Klassenmengen, wenn für irgend zwei Repräsentanten* x, y *einer und derselben Klasse immer* $\mathfrak{c}(x) = \mathfrak{c}(y)$ *ist.*

Eine solche Einteilung in Klassen ist also nur dann nicht trivial, wenn es überhaupt verschiedene Elemente von $\mathfrak{m}$ gibt, für welche $\mathfrak{c}(x) = \mathfrak{c}(y)$ ist.

28. Es seien x_1, y_1 konjugierte Elemente von $\mathfrak{m}$, so daß man schreiben kann

$$y_1 \in \mathfrak{c}(x_1).$$

Ferner seien x_2, y_2 zwei weitere Elemente von $\mathfrak{m}$, für welche gilt

$$\mathfrak{c}(x_1) = \mathfrak{c}(x_2), \quad \mathfrak{c}(y_1) = \mathfrak{c}(y_2).$$

Dann erhält man nacheinander:

$$y_1 \in \mathfrak{c}(x_2), \quad x_2 \in \mathfrak{c}(y_1) = \mathfrak{c}(y_2),$$

und daher müssen auch die Elemente x_2, y_2 konjugiert sein.

Für zwei Klassen $\bar{x}$, $\bar{y}$ einer Klasseneinteilung von $\mathfrak{m}$, welche der im Satze 7 des vorigen Paragraphen angegebenen Bedingung genügt, gilt also folgendes: entweder ist kein einziger Repräsentant x von $\bar{x}$ konjugiert zu einem Repräsentanten y von $\bar{y}$ oder aber *jeder* Repräsentant von $\bar{x}$ ist zu *jedem* Repräsentanten von $\bar{y}$ konjugiert. Ist letzteres der Fall, so wollen wir schreiben $\bar{x} \circ y$ und auf diese Weise wird die Menge $\overline{\mathfrak{m}}$ aller Klassen gepaart.

29. Ist $\mathfrak{a}$ irgendeine Teilmenge von $\mathfrak{m}$, so bezeichne man mit

$$\bar{\mathfrak{a}} = f(\mathfrak{a}) \tag{29. 1}$$

die Menge der Klassen $\bar{x}$, welche mindestens einen in $\mathfrak{a}$ enthaltenen Repräsentanten x besitzen. Mit dieser Bezeichnung erhält man zunächst für die charakteristische Funktion $\bar{\mathfrak{c}}(x)$ der Paarung von $\overline{\mathfrak{m}}$ die Identität

$$\bar{\mathfrak{c}}(f(x)) = f(\mathfrak{c}(x)). \tag{29. 2}$$

Nun sei $\mathfrak{a}$ irgendeine Teilmenge von $\mathfrak{m}$ und

$$\mathfrak{c}(\mathfrak{a}) = \prod_{x \in \mathfrak{a}} \mathfrak{c}(x).$$

Da die normalen Teilmengen $\mathfrak{c}(x)$ nach dem Satz 7 lauter Klassenmengen sind, erhält man die Gleichung

$$f(\mathfrak{c}(\mathfrak{a})) = f\Big(\prod_{x \in \mathfrak{a}} \mathfrak{c}(x)\Big) = \prod_{x \in \mathfrak{a}} f(\mathfrak{c}(x)). \tag{29. 3}$$

Mit Benutzung von (29. 2) hat man aber

$$\prod_{x \in \mathfrak{a}} f(\mathfrak{c}(x)) = \prod_{x \in \mathfrak{a}} \bar{\mathfrak{c}}(f(x)) = \prod_{\bar{x} \in \bar{\mathfrak{a}}} \bar{\mathfrak{c}}(\bar{x}) = \bar{\mathfrak{c}}(\bar{\mathfrak{a}}). \tag{29. 4}$$

Die Vergleichung von (29. 3) und (29. 4) liefert jetzt

$$\bar{\mathfrak{c}}(f(\mathfrak{a})) = f(\mathfrak{c}(\mathfrak{a})), \tag{29. 5}$$

und es ist also auch

$$\bar{\mathfrak{c}}^2(\bar{\mathfrak{a}}) = \bar{\mathfrak{c}}\big(f(\mathfrak{c}(\mathfrak{a}))\big) = f(\mathfrak{c}^2(\mathfrak{a})) \tag{29. 6}$$

Ist nun $\mathfrak{a} = \mathfrak{c}^2(\mathfrak{a})$ eine normale Teilmenge von $\mathfrak{m}$, so hat man folglich

$$\bar{\mathfrak{c}}^2(\bar{\mathfrak{a}}) = f(\mathfrak{a}) = \bar{\mathfrak{a}},$$

d. h. $\bar{\mathfrak{a}}$ ist auch eine normale Teilmenge von $\overline{\mathfrak{m}}$. Ist umgekehrt $\bar{\mathfrak{a}}$ normal, so erhält man zunächst aus (29. 1) und (29. 6)

$$f(\mathfrak{a}) = \bar{\mathfrak{a}} = f(\mathfrak{c}^2(\mathfrak{a})).$$

Nun sei $\mathfrak{b}$ die kleinste Klassenmenge, für welche $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{b}$ ist; es ist dann

$$f(\mathfrak{a}) = f(\mathfrak{b}), \quad \mathfrak{c}^2(\mathfrak{a}) = \mathfrak{c}^2(\mathfrak{b})$$

und daher auch

$$f(\mathfrak{b}) = f(\mathfrak{c}^2(\mathfrak{b})).$$

Da aber $\mathfrak{b}$ eine Klassenmenge ist, folgt daraus $\mathfrak{b} = \mathfrak{c}^2(\mathfrak{b})$, d. h. $\mathfrak{b}$ ist eine normale Teilmenge von $\mathfrak{m}$, für welche $f(\mathfrak{b}) = \bar{\mathfrak{a}}$ ist. Die normalen Teilmengen von $\mathfrak{m}$ und von $\overline{\mathfrak{m}}$ sind also *eineindeutig* aufeinander bezogen.

Für Klassenmengen $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ gelten aber die Gleichungen

$$f(\mathfrak{a}\mathfrak{b}) = f(\mathfrak{a})\, f(\mathfrak{b}), \quad f(\mathfrak{a} \dot{+} \mathfrak{b}) = f(\mathfrak{a}) \dot{+} f(\mathfrak{b}),$$

so daß schließlich der Satz besteht:

Satz 8. *Wird eine gepaarte Menge* $\mathfrak{m}$ *homomorph auf eine Menge* $\overline{\mathfrak{m}}$ *abgebildet, so daß für je zwei Repräsentanten* x_1, x_2 *eines Elementes* x *von* $\overline{\mathfrak{m}}$ *immer* $\mathfrak{c}(x_1) = \mathfrak{c}(x_2)$ *ist, so wird dadurch auch* $\overline{\mathfrak{m}}$ *gepaart, und zwar so, daß die Verbände* $\mathfrak{M}$ *und* $\overline{\mathfrak{M}}$ *der normalen Elemente von* $\mathfrak{m}$ *bzw.* $\overline{\mathfrak{m}}$ *isomorph auf einander abgebildet werden.*

30. Unter allen Homomorphien, für welche der letzte Satz gilt, gibt es eine ausgezeichnete: es ist diejenige, bei welcher jede Klasse x mit dem Repräsentanten x aus überhaupt allen Elementen x_i besteht, für welche

$$\mathfrak{c}(x_i) = \mathfrak{c}(x) \tag{30. 1}$$

ist. Bei dieser Wahl der Klassen $\bar{x}$ (und nur bei dieser) besteht die Aussage:

$$\text{aus } \bar{\mathfrak{c}}(\bar{x}) = \bar{\mathfrak{c}}(\bar{y}) \text{ folgt } \bar{x} = \bar{y}. \tag{30. 2}$$

Ist nämlich $\bar{x} \neq y$, so ist für irgendeinen Repräsentanten x von $\bar{x}$ und für irgendeinen Repräsentanten y von $\bar{y}$ immer $\mathfrak{c}(y) \neq \mathfrak{c}(x)$, weil aus $\mathfrak{c}(y) = \mathfrak{c}(x)$ folgen würde, daß auch y ein Repräsentant von $\bar{x}$ ist. Dann kann nach (29. 5) eben nicht $\bar{\mathfrak{c}}(\bar{x}) = \bar{\mathfrak{c}}(\bar{y})$ sein.

Eine Paarung von $\overline{\mathfrak{m}}$, für welche (30. 2) besteht, soll eine *reduzierte* Paarung genannt werden. Ist die Paarung reduziert, so sind auch die Elemente

$$\xi = \bar{\mathfrak{c}}^2(\bar{x}), \qquad \bar{\eta} = \bar{\mathfrak{c}}^2(\bar{y})$$

des Verbandes $\overline{\mathfrak{M}}$ nur dann einander gleich, wenn $\bar{x} = \bar{y}$ ist.

Durch die Gleichung $\xi = \bar{\mathfrak{c}}^2(x)$ wird somit die ganze Menge $\overline{\mathfrak{m}}$ *eineindeutig* auf eine Teilmenge $\overline{\mathfrak{M}}_1$ des Verbandes $\overline{\mathfrak{M}}$ abgebildet, d. h. die Menge $\overline{\mathfrak{m}}$ wird in $\overline{\mathfrak{M}}$, oder in den zu $\overline{\mathfrak{M}}$ isomorphen Verband $\mathfrak{M}$, *eingebettet*.

31. Anwendung auf teilweise geordnete Mengen. Ehe wir die letzten Resultate für teilweise geordnete Mengen verwenden, wollen wir einige Bemerkungen allgemeiner Natur einschieben.

Es sei A die Menge der Bindungen, welche eine teilweise Ordnung $\mathfrak{m}(\mathsf{A})$ von $\mathfrak{m}$ definieren, und D_0 sei die Gesamtheit der in A enthaltenen Doppelbindungen. Dann ist D_0 ebenso wie A notwendig eine transitive Menge von Bindungen. Allgemeiner sei mit D eine transitive Teilmenge der Doppelbindungen D_0 verstanden, welche aber alle Doppelbindungen $x \subseteq x$ enthält. Ordnet man jedem Element a von $\mathfrak{m}$ alle Elemente x zu, für welche die Bindungen $a \subseteq x$ und $x \subseteq a$ in D vorkommen, so werden die Elemente von $\mathfrak{m}$ in Klassen $\bar{a}, \bar{b}, \ldots$ zusammengefaßt. Die Menge $\overline{\mathfrak{m}}$ aller dieser Klassen wird dann teilweise geordnet, wenn wir $\bar{a} \subseteq \bar{b}$ schreiben, sobald für zwei Repräsentanten a von $\bar{a}$ und b von $\bar{b}$ (und dann auch für alle übrigen) die Bindung $a \subseteq b$ in A vorkommt. Diese Operation, durch welche die teilweise Ordnung $\mathfrak{m}(\mathsf{A})$ in die teilweise Ordnung $\overline{\mathfrak{m}}(\overline{\mathsf{A}})$ übergeht, kann als eine *Identifizierung* der Elementenpaare von D aufgefaßt werden.

32. Zwischen den Operationen der Identifizierung, welche soeben betrachtet wurde, und der Adjunktion einer Menge B von Bindungen, welche im § 21 erklärt wurde, besteht nun ein Vertauschungssatz.

Bei der Identifizierung entspricht nämlich der Menge B von Bindungen $a \subseteq b$ eindeutig eine Menge $\overline{\mathsf{B}}$ von Bindungen $\bar{a} \subseteq \bar{b}$.

Durch Adjunktion der Menge B gehe die teilweise Ordnung $\mathfrak{m}(\mathsf{A})$ in $\mathfrak{m}(\mathsf{C})$ über. Ebenso gehe durch Adjunktion der Bindungen $\overline{\mathsf{B}}$ die teilweise Ordnung $\overline{\mathfrak{m}}(\overline{\mathsf{A}})$ in $\overline{\mathfrak{m}}(\overline{\mathsf{C}})$ über. Durch Identifizierung der Elementenpaare

aus D gehe endlich $\mathfrak{m}(\mathsf{C})$ in $\overline{\mathfrak{m}}(\mathsf{C}^*)$ über. Jede Bindung aus $\overline{\mathsf{A}} \dotplus \overline{\mathsf{B}}$ ist in C^* enthalten, und daraus folgt

$$\overline{\mathsf{C}} \subseteq \mathsf{C}^*. \tag{32. 1}$$

Es wird nun behauptet, daß darüber hinaus

$$\overline{\mathsf{C}} = \mathsf{C}^* \tag{32. 2}$$

ist.

Die Gleichung (32. 2) ist tatsächlich richtig, wenn die Menge B aus einer einzigen Bindung $a \subseteq b$ besteht. Es sei nämlich $x \subseteq y$ eine Bindung von C^*, welche nicht in $\overline{\mathsf{A}}$ enthalten ist. Sind dann x, y zwei Repräsentanten von $\bar{x}$ bzw. $\bar{y}$, so ist die Bindung $x \subseteq y$ wohl in C, aber nicht in A enthalten. Dann müssen aber die Bindungen $x \subset a$, $b \subseteq y$ in A und die Bindungen $\bar{x} \subseteq \bar{a}$, $\bar{b} \subseteq \bar{y}$ in $\overline{\mathsf{A}}$ enthalten sein. Daraus folgt, daß $\bar{x} \subseteq \bar{y}$ auch in $\overline{\mathsf{C}}$ enthalten ist, und hiermit ist in diesem speziellen Fall (32. 2) bewiesen.

Zweitens betrachten wir eine Menge $\{\mathsf{B}_i\}$ von Bindungen, welche dieselben Eigenschaften haben soll, wie die gleichnamige Menge des § 21. Unter der Annahme, daß der Vertauschungssatz für alle B_i gilt, muß er auch für ihre Vereinigung $\mathsf{B} = \Sigma \dotplus \mathsf{B}_i$ bestehen. Dies folgt direkt aus der Tatsache, daß man hier

$$\overline{\mathsf{C}} = \Sigma \dotplus \overline{\mathsf{C}}_i, \quad \mathsf{C}^* = \Sigma \dotplus \mathsf{C}_i^*$$

schreiben kann, und daß nach Voraussetzung $\overline{\mathsf{C}}_i = \mathsf{C}_i^*$ ist.

Der Beweis des Vertauschungssatzes für beliebige Mengen B wird dann nach der Schlußweise des § 22 zu Ende geführt.

33. Durch eine beliebige eindeutige Abbildung sollen die Elemente $a, b, \ldots$ einer Menge $\mathfrak{m}$ auf die Elemente $\bar{a}, \bar{b}, \ldots$ einer Menge $\overline{\mathfrak{m}}$ abgebildet werden. Denkt man sich zwischen je zwei Elementen von $\mathfrak{m}$, welche dasselbe Bild $\bar{a}$ besitzen, Doppelbindungen aufgestellt, so ist der Prozeß der Identifizierung der Elementenpaare von D der Abbildung äquivalent, von der wir ausgegangen sind.

Wir betrachten nun irgendeine teilweise Ordnung $\mathfrak{m}(\mathsf{A})$ von $\mathfrak{m}$, adjungieren die Doppelbindungen D zu den Bindungen A und identifizieren in der auf diese Weise erhaltenen teilweisen Ordnung $\mathfrak{m}(\mathsf{C})$ die Elementenpaare von D. Als Resultat erhalten wir eine teilweise Ordnung $\overline{\mathfrak{m}}(\overline{\mathsf{C}})$ von $\overline{\mathfrak{m}}$.

Nach dem Vertauschungssatz des letzten Paragraphen kann man nun dieselbe teilweise Ordnung $\overline{\mathfrak{m}}(\overline{\mathsf{C}})$ erhalten, indem man von den Bindungen $\overline{\mathsf{A}}$ ausgeht, welche in $\overline{\mathfrak{m}}$ den Bindungen A von $\mathfrak{m}$ entsprechen, und die kleinste transitive Menge von Bindungen der Elemente von $\overline{\mathfrak{m}}$ bestimmt, welche alle Bindungen von $\overline{\mathsf{A}}$ enthält.

34. Von einer beliebigen teilweisen Ordnung $\mathfrak{m}\,(\mathsf{A})$ der Menge $\mathfrak{m}$ ausgehend, bilden wir nach dem § 26 die gesättigte teilweise Ordnung $\mathfrak{m}\,(\mathsf{A}^*)$. Die Bindungen von A^* werden nach der Regel (25. 1) hergestellt; Doppelbindungen von A^* bestehen danach zwischen je zwei Elementen, für welche $\mathfrak{c}^2(a) = \mathfrak{c}^2(b)$ und folglich auch $\mathfrak{c}^3(a) = \mathfrak{c}^3(b)$ oder $\mathfrak{c}\,(a) = \mathfrak{c}\,(b)$ gilt.

Genau dieselben Doppelbindungen werden nach dem § 30 *benötigt, um durch Identifizierung die Paarung der relativ primen Elemente von* $\mathfrak{m}\,(\mathsf{A})$ *zu reduzieren.*

Nach dem vorigen Paragraphen kann man diese Reduktion der Paarung folgendermaßen konstruieren: man betrachte die Menge $\overline{\mathfrak{m}}$, welche aus $\mathfrak{m}$ durch Identifizierung der Elementenpaare der Doppelbindungen D^*, welche in A^* enthalten sind, entsteht. Hierauf führe man sämtliche Bindungen $\bar{a} \subseteq \bar{b}$ ein, für welche die Bindung $a \subset b$ zwischen mindestens einem Repräsentanten a von $\bar{a}$ und mindestens einem Repräsentanten b von $\bar{b}$ in A vorhanden ist. Die kleinste transitive Menge $\overline{\mathsf{A}}$ von Bindungen, welche sämtliche so konstruierte Bindungen $\bar{a} \subseteq \bar{b}$ enthält, bestimmt die gesuchte teilweise Ordnung $\overline{\mathfrak{m}}\,(\overline{\mathsf{A}})$ von $\overline{\mathfrak{m}}$. Man beachte, daß $\overline{\mathfrak{m}}\,(\overline{\mathsf{A}})$ immer gesättigt ist, wenn $\mathsf{A} = \mathsf{A}^*$ ist.

35. Was folgt nun aus der Tatsache, daß $\bar{\mathfrak{c}}\,(\bar{x})$ die charakteristische Funktion einer reduzierten Paarung ist? Sind x und $\bar{y}$ zwei verschiedene Elemente von $\overline{\mathfrak{m}}$, so müssen die normalen Mengen $\bar{\mathfrak{c}}\,(\bar{x})$ und $\bar{\mathfrak{c}}\,(\bar{y})$ voneinander verschieden sein. Mindestens ein Element $\bar{u}$ muß also vorhanden sein, welches z. B. in $\bar{\mathfrak{c}}\,(\bar{x})$, aber nicht in $\bar{\mathfrak{c}}\,(\bar{y})$ enthalten ist. Dann ist $\bar{u}$ relativ prim zu $\bar{x}$, aber nicht relativ prim zu $\bar{y}$, und es gibt einen Teil $\bar{z}$ von $\bar{u}$ und y, welcher nicht in $\bar{\mathfrak{n}}$ enthalten ist, und welcher selbstverständlich — ebenso wie u — relativ prim zu $\bar{x}$ ist. Da dieser Sachverhalt auch umkehrbar ist, läßt sich sagen:

Dann und nur dann ist $\bar{\mathfrak{c}}\,(x)$ *die charakteristische Funktion einer reduzierten Paarung, wenn man jedem Paar von verschiedenen Elementen* $\bar{x}$, $\bar{y}$ *aus* $\overline{\mathfrak{m}}$ *ein nicht in* $\bar{\mathfrak{n}}$ *enthaltenes Element* $\bar{z}$ *zuordnen kann, welches Teil des einen der beiden Elemente* x, $\bar{y}$ *ist und relativ prim zum anderen ist.*

Teilweise Ordnungen einer Menge $\overline{\mathfrak{m}}$, welche diese Eigenschaften besitzen, hat zuerst Herr A. Bischof in seiner sehr bemerkenswerten Dissertation[3]) betrachtet und ihre große Bedeutung nach vielen Seiten beleuchtet. Unsere Resultate geben nun ein Mittel, sämtliche teilweise geordnete Mengen herzustellen, welche den zusätzlichen Forderungen genügen, die Bischof

[3]) Artur Bischof, Beiträge zur Carathéodoryschen Algebraisierung des Integralbegriffs. Schriften des Math. Inst. und des Instituts f. angew. Math. d. Univ. Berlin, Bd. 5, Heft 4, 1941.

benutzt hat. Man braucht nur, wie wir soeben sahen, von einer beliebigen teilweisen Ordnung $\mathfrak{m}(\mathsf{A})$ von $\mathfrak{m}$ ausgehend, die Elemente von $\mathfrak{m}$ in geeigneter Weise zu Klassen zusammenzufassen.

36. Beispiele. Wir betrachten eine gepaarte Menge $\mathfrak{m}$ von fünf Elementen 0, 1, 2, 3 und 4. Hierbei soll 0 zu allen übrigen Elementen konjugiert sein, und es sollen außerdem die Relationen

$$1 \circ 2, \quad 2 \circ 3, \quad 3 \circ 4 \tag{36. 1}$$

bestehen. Dann hat man

$$\begin{cases} \mathfrak{c}(0) = \mathfrak{m} = \mu, \quad \mathfrak{c}(\mathfrak{m}) = \{0\} = \nu, \\ \mathfrak{c}(1) = \{0, 2\}, \quad \mathfrak{c}(2) = \{0, 1, 3\}, \quad \mathfrak{c}(3) = \{0, 2, 4\}, \quad \mathfrak{c}(4) = \{0, 3\}. \end{cases} \tag{36. 2}$$

Der Verband $\mathfrak{M}$ der normalen Elemente besteht hier aus den sechs Elementen

$$\begin{cases} \mu, \quad \nu, \quad \alpha = \{0, 2\}, \qquad \beta = \{0, 3\}, \\ \alpha' = \mathfrak{c}(\alpha) = \{0, 1, 3\}, \quad \beta' = \mathfrak{c}(\beta) = \{0, 2, 4\} \end{cases} \tag{36. 3}$$

und hat die Gestalt der nebenstehenden Figur.

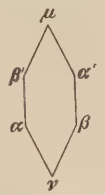

Fig. 1.

Dieser Verband ist kein Boolescher Ring, denn man hat $\alpha' \beta' = \nu$, und nach dem Satz 4 des § 19 müßte $\alpha' \subseteq \beta$ sein, was nicht der Fall ist.

Dagegen ist die Paarung eine reduzierte. Die Menge $\mathfrak{m}$ wird eineindeutig auf einen Teil von $\mathfrak{M}$ abgebildet, wenn man setzt

$$\nu \sim 0, \quad \alpha' \sim 1, \quad \alpha \sim 2, \quad \beta \sim 3, \quad \beta' \sim 4. \tag{36. 4}$$

37. Die Betrachtung der Elementenpaare von $\mathfrak{m}$, welche bei der Zuordnung (36. 4) relativ primen Elementen des Verbandes $\mathfrak{M}$ entsprechen, liefert eine neue Paarung von $\mathfrak{m}$, welche durch die Relationen

$$1 \circ 2, \quad 1 \circ 4, \quad 2 \circ 3, \quad 3 \circ 4 \tag{37. 1}$$

definiert ist, und demnach dadurch erhalten wird, daß man den früheren Relationen (36. 1) noch $1 \circ 4$ hinzufügt. Bezeichnet man mit $\mathfrak{c}^*(x)$ die charakteristische Funktion dieser neuen Paarung, so erhält man

$$\mathfrak{c}^*(1) = \mathfrak{c}^*(3) = \{0, 2, 4\}, \quad \mathfrak{c}^*(2) = \mathfrak{c}^*(4) = \{0, 1, 3\}.$$

Der neue Verband $\mathfrak{M}^*$ ist ein Boolescher Ring, der aus den vier Elementen

$$\mu, \quad \nu, \quad \gamma = \{0, 2, 4\}, \quad \gamma' = \{0, 1, 3\}$$

besteht. Hier ist aber die neue Paarung von $\mathfrak{m}$ nicht mehr reduziert.

38. In einem dritten Beispiel sollen die Elemente $x, y, \ldots$ von $\mathfrak{m}$ die *offenen* Punktmengen eines beliebigen Euklidischen Raumes sein, und zwei Elemente sollen konjugiert sein, wenn ihr (mengentheoretischer) Durchschnitt leer ist.

Hier wollen wir folgende (von den früheren verschiedene) Bezeichnungen benutzen: die Komplementärmenge einer beliebigen Punktmenge X des Raumes wird mit X', der offene Kern von X bzw. X' wird mit X_α, X'_α, und die abgeschlossene Hülle dieser Punktmengen mit X_β, X'_β bezeichnet. Endlich soll $\mathfrak{g}(X)$ die Menge aller offenen Teilmengen von X bedeuten, so daß man auch schreiben kann

$$\mathfrak{g}(X) = \mathfrak{g}(X_\alpha).$$

Für die charakteristische Funktion der angegebenen Paarung hat man dann

$$\mathfrak{c}(x) = \mathfrak{g}(x') = \mathfrak{g}(x'_\alpha).$$

Es sei jetzt $\mathfrak{a}$ eine beliebige Teilmenge von $\mathfrak{m}$; mit v bezeichnen wir die Vereinigung aller offenen Punktmengen, welche als Elemente von $\mathfrak{a}$ auftreten. Die offenen Punktmengen, welche zu allen Punktmengen aus $\mathfrak{a}$ fremd sind, und die offenen Punktmengen, welche zu v fremd sind, sind nun dieselben. Daraus folgt

$$\mathfrak{c}(\mathfrak{a}) = \mathfrak{c}(v) = \mathfrak{g}(v') = \mathfrak{g}(v'_\alpha).$$

Infolgedessen kann man schreiben

$$\mathfrak{c}(\mathfrak{g}(y)) = \mathfrak{c}(y) = \mathfrak{g}(y').$$

Mit $y = x'_\alpha$ hat man aber $y' = x_\beta$, und folglich

$$\mathfrak{c}^2(x) = \mathfrak{c}(\mathfrak{g}(x'_\alpha)) = \mathfrak{g}(x_\beta),$$
$$\mathfrak{c}^2(\mathfrak{a}) = \mathfrak{c}^2(v) = \mathfrak{g}(v_\beta).$$

Alle normalen Teilmengen von $\mathfrak{m}$ können also in der Gestalt $\mathfrak{g}(v_\beta)$ geschrieben werden.

Sind nun v und w offene Punktmengen, so folgt aus $vw = 0$ zwar nicht $v_\beta w_\beta = 0$, trotzdem aber ist immer $\mathfrak{g}(v_\beta)\,\mathfrak{g}(w_\beta) = 0$. Wegen $v \in \mathfrak{g}(v_\beta)$, $w \in \mathfrak{g}(w_\beta)$ ist umgekehrt immer $vw = 0$ eine Folge von $\mathfrak{g}(v_\beta)\,\mathfrak{g}(w_\beta) = 0$. Nach dem Satz 6 des § 25 muß also immer der Verband $\mathfrak{M}$ der normalen Teilmengen von $\mathfrak{m}$ ein Somenring sein. Letzteres folgt auch sofort nach demselben Satze aus der Tatsache, daß man die Elemente von $\mathfrak{m}$ teilweise ordnen kann.

Die zur gegebenen Paarung von $\mathfrak{m}$ korrespondierende reduzierte Paarung erhält man, indem man alle offenen Punktmengen, welche dieselbe abgeschlossene Hülle besitzen, zu einer Klasse zusammenfaßt.

Der Somenring $\mathfrak{M}$, welchen wir soeben erhalten haben, hat sehr eigentümliche Eigenschaften. Unter anderem liefert er das einfachste Beispiel eines vollkommenen Somenringes, dessen Elemente man nicht isomorph auf die Teilmengen einer festen Menge abbilden kann.

(Eingegangen am 6. Januar 1942.)

Über die ebene Bewegung eines unausdehnbaren Fadens.

Herrn Konrad Knopp
zum 60. Geburtstag am 22. Juli 1942 gewidmet.

Von

Georg Hamel in Berlin.

Wir betrachten zunächst einen unausdehnbaren Idealfaden, der also keinerlei Steifigkeit aufweist und studieren seine ebenen Bewegungen. Er möge schwer sein, seine Dichte je Längeneinheit ϱ konstant; im dritten Teil werden wir allgemeine äußere Kräfte $X(t)\,ds$, $Y(t)\,ds$ längs des Fadens verteilt annehmen. Die Bewegungsgleichungen finden sich in allen Lehrbüchern; wir nehmen im allgemeinen die Existenz und Stetigkeit der gebrauchten Ableitungen an. Aber in der Durchführung bei gegebenen Anfangs- und Randbedingungen gibt es noch merkwürdige, ja geradezu paradoxe Erscheinungen, worauf Pailloux[1]) und Kucharski[2]) hingewiesen haben. Im Teil I behandeln wir ein von Pailloux auf S. 10 bis 15 der genannten Arbeit erwähntes Paradoxon; im Teil II behandeln wir dieselbe Aufgabe unter Berücksichtigung von Seilsteifigkeit; im Teil III formulieren wir einen Existenzsatz — wieder für den Idealfaden — bei Annahme vollkommener Stetigkeit, geben eine strenge Sonderlösung und skizzieren einen Weg zur Auffindung der allgemeinen Lösung. Zum Schluß ein allgemeiner Satz, der zeigt, daß eine bestimmte Beschränkung der Randbedingungen bei voller Stetigkeit eintreten muß.

I. Teil.

Ein Faden, der unausdehnbar sei und keinerlei Steifigkeit besitze, habe zu Anfang ($t = 0$) horizontale Lage; er sei schwer (Dichte je Längeneinheit $\varrho = \text{const}$) und werde losgelassen, doch sei das eine Ende (bei $s = 0$, s Bogenlänge, l gesamte Länge) festgehalten im Punkte $x = 0$, $y = 0$. Die Anfangsgeschwindigkeit sei 0. Das Problem ist schwierig, es kann mit Annahme vollständiger Stetigkeit und ohne Steifigkeit nicht gelöst werden, worauf schon Pailloux[3]) aufmerksam gemacht hat.

---

[1]) H. Pailloux, Contribution à l'étude des systèmes déformables. Ann. de Toulouse, 4 série, t. I, 1937.

[2]) W. Kucharski, Zur Kinetik dehnungsloser Seile mit Knickstellen. Ing.-Archiv XII (1941), S. 109.

[3]) Pailloux, l. c. S. 10—15.

Denn setzt man mit der Fadenspannung S das Problem in rechtwinkligen Koordinaten an (die y-Achse zeige nach oben, die x-Achse nach rechts), so erhält man, wie bekannt, die Differentialgleichungen:

$$(1)\quad \begin{cases} \varrho \dfrac{\partial^2 x}{\partial t^2} = \dfrac{\partial}{\partial s}(S\cos\vartheta) = \dfrac{\partial S}{\partial s}\cos\vartheta - S\sin\vartheta\dfrac{\partial\vartheta}{\partial s}, \\ \varrho \dfrac{\partial^2 y}{\partial t^2} = -\varrho g + \dfrac{\partial}{\partial s}(S\sin\vartheta) = -\varrho g + \dfrac{\partial S}{\partial s}\sin\vartheta + S\cos\vartheta\dfrac{\partial\vartheta}{\partial s}, \\ \dfrac{\partial x}{\partial s} = \cos\vartheta, \quad \dfrac{\partial y}{\partial s} = \sin\vartheta. \end{cases}$$

Der Faden sei zu Anfang ungespannt. Dann ist zu Anfang $S = 0$, $\vartheta = 0$, $\dfrac{\partial\vartheta}{\partial s} = 0$, $\dfrac{\partial S}{\partial s} = 0$ und also zu Anfang

$$\frac{\partial^2 x}{\partial t^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = -g,$$

folglich, da die Anfangsgeschwindigkeiten Null sind, bis auf Glieder höherer als der zweiten Ordnung in t

$$x = s, \quad y = -\tfrac{1}{2} g t^2,$$

was mit $x = 0$, $y = 0$ für $s = 0$ unverträglich ist. Man überlegt nun leicht, daß ein *Knick* eintreten wird. Der weitaus größte Teil des Fadens muß zunächst dem freien Fallgesetz gemäß

$$y = -\tfrac{1}{2} g t^2 \quad \text{für} \quad s \geqq s_0$$

gehorchen, denn es gibt bei anfangs horizontaler Lage keine Kraft, auch keine Seilspannung, welche der Schwere entgegenwirken könnte. Nur am Ende, d. h. für $s < s_0$, wird eine Abweichung stattfinden; der feste Punkt 0 wird das Seil am Ende festhalten, es wird deshalb einen fortlaufenden Knick an der Stelle $s_0(t)$ bekommen.

Wir können nun das Problem wenigstens für *kleine* t, d. h. für einen Anfangszustand lösen, und zwar in folgender Weise:

Wir nehmen an, daß in erster Näherung

$$s_0 = a t^{\varkappa}$$

mit $0 < \varkappa$ angenommen werden kann; a positive Konstante. Für $s \geqq s_0$ bleibe das Seil horizontal, es sei dort $y = -\tfrac{1}{2} g t^2$.

Auch in dem kleinen Stück $s \leqq s_0$ sehen wir zu Anfang ϑ als klein an.

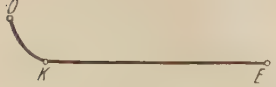

Fig. 1.

In dem Stück KE (Knick bis Ende) gelte streng $\vartheta = 0$. Dann haben wir dort die Bewegungsgleichung

$$\frac{\partial S}{\partial s} = \varrho \ddot{x}$$

und da $\ddot{x}$ von s unabhängig sein muß (wegen der Unausdehnbarkeit), gilt für $s \geqq s_0$

(2) $$S = \varrho \ddot{x} (s - l),$$

da $S = 0$ für $s = l$ sein muß.

Andererseits ist nach der bekannten Formel an einer Knickstelle[4])

(3) $$S^{(0)} = \varrho \dot{s}_0^2 \quad \text{in } K,$$

so daß

(4) $$\dot{s}_0^2 = x (s_0 - l)$$

gelten muß. Ist nun

$$s_0 = a t^\varkappa, \quad \dot{s}_0 = \varkappa a t^{\varkappa - 1}, \quad \varkappa > 0,$$

so gilt bei Vernachlässigung von s_0 gegen l (es soll t klein sein) nach (3)

$$\varrho \varkappa^2 a^2 t^{2\varkappa - 2} = S^{(0)}$$

und also nach (2)

(5) $$\varkappa^2 a^2 t^{2\varkappa - 2} = - l \ddot{x}.$$

Wir müssen, damit $\ddot{x}$ zu Anfang Null sei, $\varkappa > 1$ voraussetzen. Dann folgt

$$\ddot{x} = - \frac{\varkappa^2 a^2}{l} t^{2\varkappa - 2},$$

(6) $$\dot{x} = - \frac{\varkappa^2 a^2}{l} \frac{t^{2\varkappa - 1}}{2\varkappa - 1}, \quad x = - \frac{\varkappa a^2}{2 l (2\varkappa - 1)} t^{2\varkappa} + s.$$

Damit sind die Gleichungen für $s \geqq s_0$ erfüllt.

Nun betrachten wir den Teil $s \leqq s_0$.

Hier können wir in erster Näherung $\ddot{x}$ als klein voraussetzen, und da auch $\sin \vartheta$ klein, $\cos \vartheta \approx 1$ gilt, bekommen wir aus der ersten Gleichung (1) als erste Näherung

$$S = \text{const}, \quad \text{d. h. } S = S^{(0)} = \varrho \dot{s}_0^2 = \varrho a^2 \varkappa^2 t^{2\varkappa - 2}$$

(unabhängig von s). Mit analoger Vernachlässigung gibt die zweite Gleichung (1)

$$\varrho \ddot{y} = S^{(0)} \frac{\partial \vartheta}{\partial s} - \varrho g$$

oder

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = a^2 \varkappa^2 t^{2\varkappa - 2} \frac{\partial^2 y}{\partial s^2} - g \quad \left(\vartheta \approx \frac{\partial y}{\partial s} \text{ angenommen}\right).$$

Setzen wir in dieser Differentialgleichung $y = - \frac{1}{2} g t^2 + Y(t, s)$, so bekommen wir

$$\frac{\partial^2 Y}{\partial t^2} = a^2 \varkappa^2 t^{2\varkappa - 2} \frac{\partial^2 Y}{\partial s^2}.$$

[4]) Pailloux, C. R. Paris 1939, S. 325—327. Sur le mouvement d'un fil où glisse un petit anneau. Kucharski, l. c., Gleichung (12). Gleichung (3) ist keine andere als die Gleichung der Charakteristiken der ersten der Gleichungen (2) in Teil III.

Diese Gleichung aber muß nach Ähnlichkeitsbetrachtungen Lösungen der Form

$$t^\alpha f(z) \text{ mit } z = \frac{s}{a t^\varkappa}$$

haben. Die Rechnung bestätigt die Behauptung und gibt für f die gewöhnliche Differentialgleichung

$$\varkappa^2 f''(1 - z^2) + \varkappa (2\alpha - \varkappa - 1) z f' - \alpha(\alpha - 1) f = 0.$$

Da $z = \frac{s}{a t^\varkappa}$, ferner $s \leqq s_0 = a t^\varkappa$ ist, kommen für z nur Werte $0 \leqq z \leqq 1$ in Frage.

Mithin gibt es Lösungen der Form

$$y = -\frac{1}{2} g t^2 + \sum_\alpha t^\alpha f_\alpha \left(\frac{s}{a t^\varkappa}\right). \tag{7}$$

Verlangt man für $s = s_0$ Anschluß an $y = -\frac{1}{2} g t^2$, so muß

$$\sum_\alpha t^\alpha f_\alpha (1) = 0$$

sein. Andererseits soll $y = 0$ für $s = 0$ sein, also $-\frac{1}{2} g t^2 + \Sigma t^\alpha f_\alpha(0) = 0$. Das läßt sich für $\alpha = 2$ und $f_2(0) = \frac{1}{2} g$ befriedigen.

Für $\alpha = 2$ aber lautet die gewöhnliche Differentialgleichung für f (wir unterdrücken den Index 2)

$$\varkappa^2 f''(1 - z^2) + \varkappa (3 - \varkappa) z f' - 2 f = 0. \tag{8}$$

Durch die Substitution $u = \frac{1 - z}{2}$, $z = 1 - 2u$ geht die Gleichung über in

$$u(1 - u) \frac{d^2 f}{d u^2} - \frac{3 - \varkappa}{2\varkappa} (1 - 2u) \frac{d f}{d u} - \frac{2}{\varkappa^2} f = 0.$$

Dies ist eine Gaussssche Differentialgleichung, d. h. sie ist von der Form

$$u(1 - u) \frac{d^2 f}{d u^2} + [\gamma - (\alpha + \beta + 1) u] \frac{d f}{d u} - \alpha \beta f = 0$$

mit

$$\gamma = -\frac{3 - \varkappa}{2\varkappa} = \frac{1}{2} - \frac{3}{2\varkappa}, \quad \alpha + \beta = -\frac{3}{\varkappa}, \quad \alpha\beta = \frac{2}{\varkappa^2},$$

$$\text{also } \alpha = -\frac{1}{\varkappa}, \quad \beta = -\frac{2}{\varkappa}.$$

Sie hat die beiden Integrale

$$F(\alpha, \beta, \gamma; u) = 1 + \frac{\alpha \beta}{1! \gamma} u + \frac{\alpha(\alpha + 1) \beta (\beta + 1)}{2! \gamma (\gamma + 1)} u^2 + \dots$$

und

$$u^{1 - \gamma} F(\alpha - \gamma + 1, \beta - \gamma + 1, 2 - \gamma; u).$$

Da aber wegen des stetigen Anschlusses in der Knickstelle $z = 1$, $f(1) = 0$ sein muß, müssen wir eine Lösung nehmen, die für $z = 1$, d. h. $u = 0$ selber Null wird. Nun ist $1 - \gamma = \frac{1}{2} + \frac{3}{2\varkappa} > 0$, also kommt nur

$$f(z) = C\left(\frac{1-z}{2}\right)^{1-\gamma} F\left(\alpha - \gamma + 1,\ \beta - \gamma + 1,\ 2 - \gamma;\ \frac{1-z}{2}\right)$$

in Frage. Da aber noch für $z = 0$ auch y gleich Null sein soll, so muß $f(0) = \frac{1}{2} g$ sein, und das liefert

$$C = \frac{\frac{1}{2} g\, 2^{1-\gamma}}{F\left(\alpha-\gamma+1,\ \beta-\gamma+1,\ 2-\gamma;\ \frac{1}{2}\right)},$$

somit

$$f(z) = \frac{1}{2} g (1-z)^{1-\gamma} \frac{F\left(\alpha-\gamma+1,\ \beta-\gamma+1,\ 2-\gamma;\ \frac{1-z}{2}\right)}{F\left(\alpha-\gamma+1,\ \beta-\gamma+1,\ 2-\gamma;\ \frac{1}{2}\right)},$$

$$y = -\frac{1}{2} g t^2 \left[1 - (1-z)^{1-\gamma} \frac{F\left(\alpha-\gamma+1,\ \beta-\gamma+1,\ 2-\gamma;\ \frac{1-z}{2}\right)}{F\left(\alpha-\gamma+1,\ \beta-\gamma+1,\ 2-\gamma;\ \frac{1}{2}\right)}\right] \text{ mit } z = \frac{s}{a\, t^{\varkappa}}.$$

Weiter ergibt sich

$$\sin\vartheta = \frac{\partial y}{\partial s} = t^2 f'(z) \frac{1}{a\, t^{\varkappa}} = \frac{1}{a} t^{2-\varkappa} f'(z)$$

und daraus

$$\frac{\partial x}{\partial s} \approx 1 - \frac{1}{2} \sin^2\vartheta = 1 - \frac{1}{2\, a^2} t^{4-2\varkappa} (f'(z))^2,$$

somit

$$x \approx s - \frac{1}{2\, a^2} t^{4-2\varkappa} \int_0^s f'(z)^2\, d\, s = s - \frac{1}{2\, a} t^{4-\varkappa} \int_0^z f'(z)^2\, dz.$$

Das Integral existiert bis zu $z = 1$ hin, da sich $f(z)$ in der Nähe von $z = 1$ wie $(1-z)^{1-\gamma}$, f'^2 wie $(1-z)^{-2\gamma}$ verhält. Es ist aber $-2\gamma = -1 + \frac{3}{\varkappa} > -1$. Aus der Formel für x folgt an der Knickstelle

$$x_0 \approx s_0 - \frac{1}{2\, a} t^{4-\varkappa} \int_0^1 f'(z)^2\, d\, z.$$

Wegen des stetigen Anschlusses muß aber wegen (6)

$$-\frac{1}{2\, a} t^{4-\varkappa} \int_0^1 f'(z)^2\, d\, z = -\frac{\varkappa\, a^2}{2\, l\, (2\varkappa - 1)} t^{2\varkappa}$$

sein. Daraus folgt

erstens $4 - \varkappa = 2\varkappa$, d. h. $\varkappa = \frac{4}{3}$,

zweitens berechnet sich a aus

$$a^3 = \frac{2\varkappa - 1}{\varkappa}\, l \int_0^1 f'(z)^2\, dz.$$

Dabei ist wegen

$$\varkappa = \frac{4}{3},\quad 1-\gamma = \frac{1}{2} + \frac{3}{2\varkappa} = \frac{13}{8},\quad \alpha+1-\gamma = -\frac{1}{\varkappa} + \frac{13}{8} = \frac{7}{8},\quad \beta+1-\gamma = \frac{1}{8},$$

$$f(z) = \frac{1}{2}\, g\,(1-z)^{\frac{13}{8}}\, \frac{F\left(\frac{7}{8}, \frac{1}{8}, \frac{21}{8}; \frac{1-z}{2}\right)}{F\left(\frac{7}{8}, \frac{1}{8}, \frac{21}{8}; \frac{1}{2}\right)},$$

$$y = -\frac{1}{2}\, g\, t^2 \left[1 - (1-z)^{\frac{13}{8}}\, \frac{F\left(\frac{7}{8}, \frac{1}{8}, \frac{21}{8}; \frac{1-z}{2}\right)}{F\left(\frac{7}{8}, \frac{1}{8}, \frac{21}{8}; \frac{1}{2}\right)} \right].$$

Der Nenner ist sicher nicht Null, da alle Argumente positive Werte haben. Dabei ist $z = \frac{s}{a\, t^{\frac{4}{3}}} \leqq 1$; *die Knickstelle pflanzt sich nach dem Gesetz* $s_0 = a\, t^{\frac{4}{3}}$ *fort*. Es ist noch

$$x = s - \frac{1}{2\,a}\, t^{\frac{8}{3}} \int_0^z f'(z)^2\, dz, \qquad \sin\vartheta = \frac{1}{a}\, t^{\frac{2}{3}} f'(z) \text{ für } s \leqq s_0,$$

und das gilt alles in erster Näherung für kleine t.

An der Knickstelle ist $f'(z)$ klein wie $(1-z)^{\frac{5}{8}}$, *also geht die Tangente noch stetig in das horizontale Stück KE über*; erst die Krümmung erleidet eine Unstetigkeit. *Die Beschleunigung* $\ddot{y}$ *wird dort unendlich und zwar positiv: der Faden wird an der Knickstelle nach oben gerissen.*

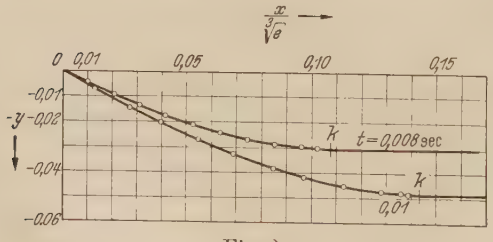

Fig. 2.

Damit ist die Lösung gefunden. Die genauen Bilder von Fig. 2 hat Frl. Ingeborg Kraft berechnet und gezeichnet.

Daß zuerst im Teil $0 \leqq s \leq s_0$ das Glied mit $\ddot{x}$ vernachlässigt wurde, rechtfertigt sich hinterher. Aus

$$\varrho\, \ddot{x} = \frac{\partial S}{\partial s} \qquad (\cos\vartheta \approx 1, \quad \sin\vartheta \approx 0)$$

folgt

$$S - S^{(0)} = \int_{s_0}^{s} \varrho\, \ddot{x}\, ds.$$

$S^{(0)}$ ist klein wie $t^{2\varkappa-2} = t^{\frac{2}{3}}$, $\ddot{x}$ klein wie $t^{2-\varkappa} = t^{\frac{2}{3}}$. Also ist das vernachlässigte Glied kleiner als $\text{const}\, t^{\frac{2}{3}} \cdot s \leqq \text{const} \cdot t^{\frac{2}{3}} \cdot t^{\frac{4}{3}} = \text{const}\, t^2 \ll S^{(0)}$.

II. Teil.

Nun soll dasselbe Problem unter *Einbeziehung von energieverzehrender Seilsteifigkeit* behandelt und gezeigt werden, daß unter bestimmten Umständen der Faden wie ein starrer Körper herunterfallen kann. Elastische Kräfte bleiben außer Betracht.

In meinem Lehrbuch der elementaren Mechanik (§ 36) habe ich die Theorie der Seilsteifigkeit so aufgestellt, daß für das Biegungsmoment B gelte

$$|B| \leqq r \cdot S$$

da, wo keine Verbiegung stattfindet, dagegen $B = \pm rS$ da, wo Verbiegung stattfindet. Das Zeichen muß so gewählt werden, daß Energieverlust eintritt, d. h.

$$\operatorname{sign} B = \operatorname{sign} \frac{dk}{dt},$$

wo k die Krümmung bedeutet. r ist eine Erfahrungskonstante von der Dimension einer Länge. Die Theorie ist unvollkommen und muß durch eine verbesserte ersetzt werden, etwa derart, daß eine Beziehung der allgemeinen Art $F(B, H, S) \leqq 0$ bzw. $= 0$ erfüllt ist, wo H die Schubkraft bedeutet. Man sollte in erster Linie einmal

$$B^2 + a^2 H^2 \leqq B_0^2 + r^2 S^2$$

experimentell studieren, wo a, B_0, r Erfahrungskonstanten sind. Es zeigt sich, daß die zu Anfang ausgesprochene Behauptung nur gelten kann, wenn $B_0 \neq 0$ ist. *Der Einfachheit halber studieren wir hier die Annahme*

$$|B| \leqq B_0 > 0;$$

und $B = \pm B_0$ mit $\operatorname{sign} B = \operatorname{sign} \frac{dk}{dt}$.

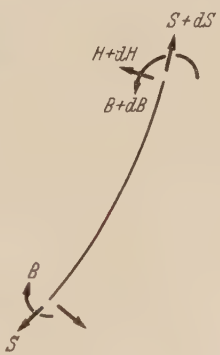

Fig. 3.

Unter Einführung von B, H, S gelten beim ebenen Problem die Gleichungen [5])

$$\frac{\partial B}{\partial s} + H = 0,$$

$$\frac{\partial S}{\partial s} - k\,H + \varkappa_s = \varrho\, w_s,$$

$$\frac{\partial H}{\partial s} + k\,S + \varkappa_\nu = \varrho\, w_\nu,$$

[5]) Siehe die „Elementare Mechanik" § 36, Nr. 184.

wo $\varkappa_s$, $\varkappa_\nu$ die Kraftkomponenten in Richtung s und ν (Normale) sind, w_s, w_ν die entsprechenden Beschleunigungen. Unter der Annahme des Falles in starrer Form ist $k = 0$ (außer in 0) und es gilt für $s > 0$

Fig. 4.

$$\frac{\partial S}{\partial s} + \varrho g \cos\varphi = -\varrho s \omega^2 \qquad (\omega = \dot{\varphi}),$$

$$\frac{\partial H}{\partial s} - \varrho g \sin\varphi = \varrho s \dot{\omega}.$$

Am Ende $s = l$ gilt $S = 0$, $H = 0$, $B = 0$. Also bekommen wir

$$S = -\varrho g \cos\varphi (s-l) - \tfrac{1}{2}\varrho\omega^2(s^2-l^2) = \varrho(l-s)\left[g\cos\varphi + \tfrac{1}{2}\omega^2(l+s)\right],$$

$$H = \tfrac{1}{2}\varrho\dot{\omega}(s^2-l^2) + \varrho g \sin\varphi (s-l) = -\varrho(l-s)\left[\tfrac{1}{2}\dot{\omega}(l+s) + g\sin\varphi\right],$$

folglich

$$\frac{\partial B}{\partial s} = -H = \tfrac{1}{2}\varrho\dot{\omega}(l^2 - s^2) + \varrho g \sin\varphi (l-s),$$

$$B = \tfrac{1}{2}\varrho\dot{\omega}(l^2 s - l^3 - \tfrac{1}{3}s^3 + \tfrac{1}{3}l^3) + \varrho g \sin\varphi\,(ls - l^2 - \tfrac{1}{2}s^2 + \tfrac{1}{2}l^2)$$

$$= -\varrho\,(l-s)^2\left[\frac{1}{6}\dot{\omega}\,(2l+s) + \sin\varphi\,\frac{g}{2}\right].$$

In 0 ist

$$B^{(0)} = -\varrho l^2\left[\frac{1}{6}\dot{\omega}\,2l + \sin\varphi\,\frac{g}{2}\right].$$

Hier soll Biegung stattfinden, also $B^{(0)} = \pm B_0$ sein. Da aber

$$\frac{dk}{dt} < 0, \quad \text{gilt} \quad B^{(0)} = -B_0$$

oder

$$\varrho l^2\left[\frac{1}{6}\dot{\omega}\,2l + \sin\varphi\,\frac{g}{2}\right] = B_0,$$

$$\dot{\omega} = -\frac{3}{2}\frac{g}{l}\sin\varphi + \frac{3B_0}{\varrho l^3}.$$

Dies ist die Differentialgleichung der Bewegung.

Sie kann unter Benutzung der Anfangsbedingung $\omega = 0$ für $\varphi = \frac{\pi}{2}$ einmal integriert werden und liefert

$$\omega^2 = \frac{3g}{l}\cos\varphi - \frac{6B_0}{\varrho l^3}\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right).$$

Damit überhaupt die Bewegung beginnt und der Faden wegen übergroßer Steifigkeit nicht stehenbleibt, muß für $\varphi = \frac{\pi}{2}$, $\dot{\omega} < 0$ ausfallen, also $B_0 < \frac{\varrho g l^2}{2}$ sein. Soll der Faden unten ankommen und nicht zwischendurch steckenbleiben, so muß für $\varphi = 0$, $\omega^2 \geqq 0$ ausfallen, d. h.

$$\frac{6B_0}{\varrho l^3}\frac{\pi}{2} \leqq \frac{3g}{l}$$

oder

$$B_0 \leqq \frac{1}{\pi}\,\varrho\, g\, l^2$$

sein.

Nun muß noch die Ungleichheit $|B| \leq B_0$ für $0 < s \leqq l$ kontrolliert werden. Es gibt zwei Fälle

(a) $$B = -\,\varrho\,(l-s)^2\left[\frac{1}{6}\,\dot{\omega}\,(2\,l+s) + \frac{g}{2}\sin\varphi\right] \leqq 0.$$

Dann muß $-B \leqq B_0$ sein. Das gibt mit

$$\dot{\omega} = -\,\frac{3}{2}\,\frac{g}{l}\sin\varphi + \frac{3}{\varrho}\,\frac{B_0}{l^3}$$

einerseits

$$-\,\varrho\,(l-s)^2\left[-\,\frac{1}{4}\,\frac{g}{l}\sin\varphi\,(2\,l+s) + \frac{1}{2}\,\frac{B_0}{\varrho\,l^3}\,(2\,l+s) + \frac{g}{2}\sin\varphi\right] \leqq 0,$$

andererseits

$$\varrho\,(l-s)^2\left[-\,\frac{1}{4}\,\frac{g}{l}\sin\varphi\,(2\,l+s) + \frac{1}{2}\,\frac{B_0}{\varrho\,l^3}\,(2\,l+s) + \frac{g}{2}\sin\varphi\right] \leqq B_0.$$

Die erste Bedingung gibt wegen $\varrho\,(l-s)^2 \geqq 0$

$$-\,\frac{1}{4}\,\frac{g}{l}\,s\sin\varphi + \frac{1}{2}\,\frac{B_0}{\varrho\,l^3}\,(2\,l+s) \geqq 0$$

oder

(A) $$\sin\varphi \leqq \frac{2\,B_0}{\varrho\,g\,l^2}\,\frac{2\,l+s}{s}.$$

Die zweite Bedingung gibt

$$-\,\frac{1}{4}\,\frac{g}{l}\,s\,(l-s)^2\,\varrho\sin\varphi + B_0\left[\frac{(l-s)^2\,(2\,l+s)}{2\,l^3} - 1\right] \leqq 0$$

oder

$$-\,\frac{1}{4}\,\frac{g}{l}\,s\,\varrho\,(l-s)^2\sin\varphi + B_0\,\frac{s\,(s^2-3\,l^2)}{2\,l^3} \leqq 0;$$

und das ist immer erfüllt.

(b) $$B \geqq 0,$$

d. h. nach derselben Rechnung

(B) $$\sin\varphi \geqq \frac{2\,B_0}{\varrho\,g\,l^2}\,\frac{2\,l+s}{s}.$$

Dann verlangt $B \leqq B_0$

$$-\,\varrho\,(l-s)^2\left[-\,\frac{1}{4}\,\frac{g}{l}\sin\varphi\,(2\,l+s) + \frac{1}{2}\,\frac{B_0}{\varrho\,l^3}\,(2\,l+s) + \frac{g}{2}\sin\varphi\right] \leqq B_0$$

oder

$$\frac{1}{4}\,\frac{g\,\varrho}{l}\,s\sin\varphi\,(l-s)^2 - B_0\left[\frac{1}{2}\,\frac{(2\,l+s)\,(l-s)^2}{l^3} + 1\right] \leqq 0$$

oder

(C) $$\sin\varphi \leqq \frac{2\,B_0}{\varrho\,g\,l^2}\,\frac{4\,l^3 - 3\,l^2\,s + s^3}{s\,(l-s)^2}.$$

Sind (B) und (C) überhaupt verträglich? Es muß dann

$$4\,l^3 - 3\,l^2\,s + s^3 > (2\,l + s)\,(l - s)^2 = 2\,l^3 - 3\,l^2\,s + s^3$$

sein, was stets der Fall ist. Zeichnen wir die Kurven

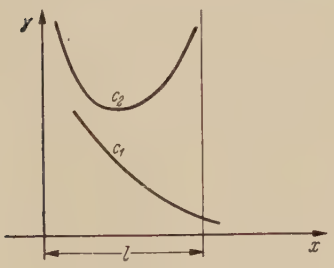

Fig. 5.

$$C_1: \quad y = \frac{2\,B_0}{\varrho\,g\,l^2}\,\frac{2\,l + s}{s}$$

und

$$C_2: \quad y = \frac{2\,B_0}{\varrho\,g\,l^2} \cdot \frac{4\,l^3 - 3\,l^2\,s + s^3}{s\,(l - s)^2},$$

so liegt C_1 stets unter C_2. Liegt $\sin\varphi$ unter C_1, so ist nach (a) keine Bedingung erforderlich, liegt aber $\sin\varphi$ über C_1, so muß es unter C_2 liegen. Da sowieso C_1 unter C_2 liegt und $\sin\varphi \leqq 1$ ist, ist notwendig und hinreichend, daß der tiefste Punkt von C_2 über oder bei 1 liegt, d. h. hinreichend und notwendig ist

$$\operatorname{Min}\frac{2\,B_0}{\varrho\,g\,l^2}\,\frac{4\,l^3 - 3\,l^2\,s + s^3}{s\,(l - s)^2} \geqq 1 \quad \text{in} \quad 0 < s < l.$$

Das gibt die Gleichung für die Stelle des Minimums

$$(-\,3\,l^2 + 3\,s^2)\,s\,(l - s)^2 - (4\,l^3 - 3\,l^2\,s + s^3)\,(l - s)\,(l - s - 2\,s) = 0$$

oder

$$s^3 - 3\,s^2\,l + 6\,l^2\,s - 2\,l^3 = 0.$$

Dafür kann man schreiben

$$(l - s)^3 + 3\,l^2\,(l - s) - 2\,l^3 = 0.$$

Für die Unbekannte $y = -\frac{s}{l} + 1$ liegt die kubische Gleichung

$$y^3 + 3\,y - 2 = 0$$

mit der Diskriminante $R = 1 + 1 = 2$ vor. Folglich ist nach der Cardanischen Formel

$$y = \sqrt[3]{1 + \sqrt{2}} + \sqrt[3]{1 - \sqrt{2}} = 0{,}5961\ldots,$$

folglich

$$s = l\,(1 - y) = l \cdot 0{,}4039.$$

Mithin lautet die Bedingung

$$\frac{2\,B_0}{\varrho\,g\,l^2} \cdot \frac{4 - 3 \cdot 0{,}4039 + 0{,}4039^2}{0{,}4039 \cdot 0{,}5961^2} \geqq 1;$$

oder

$$B_0 \geqq \varrho\, g\, l^2 \cdot 0{,}024\,31.$$

Wenn also

$$\frac{B_0}{\varrho\, g\, l^2} > 0{,}024\,31, \quad \textit{aber} \quad \frac{B_0}{\varrho\, g\, l^2} \leqq \frac{1}{\pi} = 0{,}318\,31$$

ist, ist starres Herabfallen des Fadens bis zur vertikalen Lage möglich.

Bemerkenswert ist vielleicht noch Folgendes. Wenn B zu klein ist, ist die Bedingung $|B| \leqq B_0$ zuerst für mittlere Werte von s verletzt, nämlich in der Umgebung von $s = l \cdot 0{,}4039$. Außerdem liegt dann der Fall (b) vor, wo $B > 0$ ist, also im Falle der Verletzung von $B \leqq B_0$, $\frac{dk}{dt} > 0$. Also wird sich der Faden im Falle der Verletzung von $|B| \leqq B_0$ in der Mitte nach oben biegen, an den Enden geradlinig fallen, sich also dem Bewegungszustand ohne Steifigkeit annähern. Doch ist dies zunächst nur ein Plausibilitätsergebnis, das noch näher untersucht werden muß.

Die allgemeinere Annahme $B^2 + a^2 H^2 \leqq B_0^2 + r^2 S^2$ kann geradeso untersucht werden, erfordert nur größeren Rechenaufwand.

III. Teil.

In diesem Teil wollen wir erstens die Bewegungsgleichungen des Idealfadens aus Teil I so umformen, daß nur noch S und ϑ als Unabhängige vorkommen, dann von diesen Gleichungen eine genaue Teillösung angeben und endlich ein Näherungsverfahren besprechen, das wahrscheinlich zu einem genauen Verfahren ausgebaut werden kann, wozu wir noch einige Beiträge liefern wollen.

1. *Wir verallgemeinern zuerst die Bewegungsgleichungen* durch Einführen irgendwelcher äußerer Kräfte $X(t)\,ds$, $Y(t)\,ds$, die längs des Fadens von außen einwirken mögen. Dann lauten die Bewegungsgleichungen

$$(1) \qquad \begin{cases} \varrho \dfrac{\partial^2 x}{\partial t^2} = \dfrac{\partial S}{\partial s} \cos\vartheta - S \sin\vartheta \dfrac{\partial \vartheta}{\partial s} + X(t), \\ \varrho \dfrac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \dfrac{\partial S}{\partial s} \sin\vartheta + S \cos\vartheta \dfrac{\partial \vartheta}{\partial s} + Y(t). \end{cases}$$

Um mittels $\frac{\partial x}{\partial s} = \cos\vartheta$, $\frac{\partial y}{\partial s} = \sin\vartheta$ den Winkel ϑ als Abhängige einzuführen, differenzieren wir nach s — die Existenz der Ableitungen wird vorausgesetzt — und erhalten

$$\varrho \frac{\partial^2}{\partial t^2} \cos\vartheta = \frac{\partial^2 S}{\partial s^2} \cos\vartheta - 2 \frac{\partial S}{\partial s} \sin\vartheta \frac{\partial \vartheta}{\partial s} - S \cos\vartheta \left(\frac{\partial \vartheta}{\partial s}\right)^2 - S \sin\vartheta \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial s^2},$$

$$\varrho \frac{\partial^2}{\partial t^2} \sin\vartheta = \frac{\partial^2 S}{\partial s^2} \sin\vartheta + 2 \frac{\partial S}{\partial s} \cos\vartheta \frac{\partial \vartheta}{\partial s} - S \sin\vartheta \left(\frac{\partial \vartheta}{\partial s}\right)^2 + S \cos\vartheta \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial s^2}.$$

Führt man die Differentiationen links aus, so vereinigen sich die Gleichungen leicht zu den beiden von $\sin\vartheta$ und $\cos\vartheta$ freien Differentialgleichungen

$$(2)\ ^{6}) \qquad \begin{cases} \varrho\dfrac{\partial^2\vartheta}{\partial t^2} = 2\dfrac{\partial S}{\partial s}\dfrac{\partial\vartheta}{\partial s} + S\dfrac{\partial^2\vartheta}{\partial s^2}, \\ \varrho\left(\dfrac{\partial\vartheta}{\partial t}\right)^2 = -\dfrac{\partial^2 S}{\partial s^2} + S\left(\dfrac{\partial\vartheta}{\partial s}\right)^2. \end{cases}$$

Dabei läuft s von 0 bis l (Fadenlänge), t von 0 bis $+\infty$. Wahrscheinlich besteht folgender Existenzsatz:

Bei hinreichender Beschränkung der gegebenen Größen gibt es eine eindeutig bestimmte Lösung, für die zur Zeit $t = 0$ gegeben sind: ϑ und $\frac{\partial\vartheta}{\partial t}$; für $s = 0$ und $s = l$ aber ϑ und S.

2. *Eine genaue Sonderlösung* kann man angeben. Es sei $S = \text{const.}$ $\frac{S}{\varrho}$ setzen wir gleich c^2. Dann bleiben die Gleichungen $\frac{\partial^2\vartheta}{\partial t^2} = c^2\frac{\partial^2\vartheta}{\partial s^2}$ und $\left(\frac{\partial\vartheta}{\partial t}\right)^2 = c^2\left(\frac{\partial\vartheta}{\partial s}\right)^2$. Beide haben die gemeinsamen Lösungen $\vartheta = f(s - ct)$ und $\vartheta = g(s + ct)$; aber nur eine von beiden. Betrachten wir den ersten Fall weiter. Es ist dann

$$(3) \qquad \begin{cases} x(s,t) = \int_0^s \cos\left[f(s-ct)\right]\partial s + x_0(t), \\ y(s,t) = \int_0^s \sin\left[f(s-ct)\right]\partial s + y_0(t). \end{cases}$$

Differentiation ergibt

$$\begin{aligned} \frac{\partial x}{\partial t} &= c\int_0^s \sin\left[f(s-ct)\right] f'(s-ct)\,\partial s + \dot{x}_0(t) \\ &= c\left[\cos f(-ct) - \cos f(s-ct)\right] + \dot{x}_0(t), \\ \frac{\partial y}{\partial t} &= -c\int_0^s \cos\left[f(s-ct)\right]\cdot f'(s-ct)\,\partial s + \dot{y}_0(t) \\ &= c\left[\sin f(-ct) - \sin f(s-ct)\right] + \dot{y}_0(t). \end{aligned}$$

Nochmalige Differentiation ergibt

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} &= c^2\left[\sin f(-ct)\cdot f'(-ct) - \sin f(s-ct)\cdot f'(s-ct)\right] + \ddot{x}_0(t), \\ \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} &= -c^2\left[\cos f(-ct) f'(-ct) - \cos f(s-ct)\cdot f'(s-ct)\right] + \ddot{y}_0(t). \end{aligned}$$

[6]) Die zweite Gleichung ist mit Gleichung (4) (S. 3) in der Arbeit von PAILLOUX identisch. Die Gleichungen stehen aber schon bei ROUTH, Bd. 2, Kap. XIII; s. auch mein Lehrbuch, § 58, Nr. 349.

Setzt man alles in (1) ein, so erhält man

$$(4)\qquad \begin{cases} c^2 \sin f(-ct)\, f'(-ct) + \ddot{x}_0(t) = \dfrac{1}{\varrho} X(t), \\ -c^2 \cos f(-ct)\cdot f'(-ct) + \ddot{y}_0(t) = \dfrac{1}{\varrho} Y(t). \end{cases}$$

Soll etwa, wie bei dem Fall des ersten Teils, der Anfangspunkt $s = 0$ festgehalten werden, so sind $x_0 \equiv 0$, $y_0 \equiv 0$, und man muß zur Erhaltung der Bewegung Kräfte annehmen:

$$X(t) = S \sin f(-ct)\cdot f'(-ct),$$
$$Y(t) = -S \cos f(-ct)\cdot f'(-ct).$$

Daraus folgt eine Bedingungsgleichung für X, Y; nämlich einerseits muß

$$f'^2(-ct) = \frac{1}{S^2}(X^2 + Y^2),$$

andererseits $\operatorname{tg} f(-ct) = \dfrac{X}{Y}$ sein, also $f(-ct) = -\operatorname{arctg}\dfrac{X}{Y}$;

$$-c f'(-ct) = \frac{Y\dot{X} - X\dot{Y}}{X^2 + Y^2}.$$

Vergleich gibt

$$\pm \frac{c}{S}\sqrt{X^2 + Y^2} = \frac{Y\dot{X} - X\dot{Y}}{X^2 + Y^2}$$

oder

$$(5)\qquad \mp \sqrt{S\varrho}\,(X^2 + Y^2)^{\frac{3}{4}} = -Y\dot{X} + X\dot{Y}.$$

Das läßt sich so veranschaulichen: *Betrachtet man die Kurve $x = \int X\,dt$, $y = \int Y\,dt$, also den Antrieb, so muß diese Kurve konstante Krümmung haben, d. h. ein Kreis sein. Der Radius des Kreises ist $= \dfrac{1}{\sqrt{S\varrho}}$, woraus sich S bestimmt.*

Als *zweites Beispiel* nehmen wir $X \equiv 0$, $Y \equiv -\varrho g$. Wir können dann auch noch $y_0 \equiv 0$ annehmen und müssen dann f aus

$$-c^2 \cos f(-ct)\, f'(-ct) = -g$$

bestimmen. $-ct = z$ gesetzt, gibt

$$\cos f(z)\cdot f'(z) = \frac{g}{c^2},$$

also $\sin f(z) = \dfrac{g}{c^2} z - a$ oder $f(z) = \arcsin\left(\dfrac{g}{c^2} z - a\right)$. Man kann unbeschadet der Allgemeinheit $a = 0$ setzen. Somit wird

$$x = \int_0^s \cos \arcsin\left(\frac{g}{c^2}(s - ct)\right) \partial s + x_0(t),$$

$$y = \int_0^s \sin \arcsin\left(\frac{g}{c^2}(s - ct)\right) \partial s$$

oder

$$x = \int_0^s \sqrt{1 - \frac{g^2}{c^4}(s - ct)^2}\, \partial s + x_0(t),$$

$$y = \int_0^s \frac{g}{c^2}(s - ct)\, \partial s$$

oder

$$(6)\quad \begin{cases} x = \frac{c^2}{2g}\left\{\arcsin\left(\frac{gs}{c^2} - \frac{gt}{c}\right) + \left(\frac{gs}{c^2} - \frac{gt}{c}\right)\sqrt{1 - \left(\frac{gs}{c^2} - \frac{gt}{c}\right)^2}\right\} + \\ \qquad + \frac{c^2}{2g}\left\{\arcsin\frac{gt}{c} + \frac{gt}{c}\sqrt{1 - \left(\frac{gt}{c}\right)^2}\right\} + x_0(t), \\ y = \frac{g}{2c^2}(s^2 - 2cts). \end{cases}$$

Die Wurzeln nehmen wir positiv, für den arc sin den Hauptwert. Man kann aber $x_0(t)$ nun nicht mehr Null setzen, sondern muß nach (4)

$$\ddot{x}_0(t) = -c^2 \sin f(-ct) f'(-ct) = -c^2 \sin f(z) f'(z)$$
$$= -c^2 \frac{g^2}{c^2}\frac{z}{c^2}\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{g^2}{c^4}z^2}} = \frac{g^2}{c}\frac{t}{\sqrt{1 - \frac{g^2}{c^2}t^2}}$$

annehmen. Mithin ist

$$\dot{x}_0 = \frac{g^2}{c}\int \frac{t\,dt}{\sqrt{1 - \frac{g^2}{c^2}t^2}} = -c\sqrt{1 - \frac{g^2}{c^2}t^2} + a,$$

$$x_0 = -c\int \sqrt{1 - \frac{g^2}{c^2}t^2}\, dt + at + b$$
$$= -\frac{c^2}{2g}\left\{\arcsin\frac{gt}{c} + \frac{gt}{c}\sqrt{1 - \frac{g^2t^2}{c^2}}\right\} + at + b.$$

Setzt man das in Formel (6) ein, so bekommt man für die Seilkurve

$$(7)\quad \begin{cases} x = \frac{c^2}{2g}\left\{\arcsin\left(\frac{gs}{c^2} - \frac{gt}{c}\right) + \left(\frac{gs}{c^2} - \frac{gt}{c}\right)\sqrt{1 - \left(\frac{gs}{c^2} - \frac{gt}{c}\right)^2}\right\} + at + b, \\ y = \frac{g}{2c^2}(s^2 - 2cts). \end{cases}$$

Um diese Bewegung unter Einfluß der Schwere, bei der ferner der Anfangspunkt $s = 0$ auf der Höhe $y = 0$ gehalten wird, aufrechtzuerhalten, muß man dem Anfangspunkt die Beschleunigung

$$\ddot{x}_0 = \frac{g^2}{c}\frac{t}{\sqrt{1 - \frac{g^2}{c^2}t^2}}$$

erteilen.

Diese Bewegung ist deshalb von vornherein auf das Zeitintervall $0 \leqq t < \frac{c}{g}$ beschränkt. Ferner muß der Realität von x wegen

$$|s - ct| \leqq \frac{c^2}{g} \quad \text{für} \quad 0 \leqq s \leqq l, \quad 0 \leqq t < \frac{c}{g}$$

sein, was noch $l \leqq \frac{c^2}{g}$, also $S \geqq \varrho g l$, d. h. die konstante Fadenspannung größer als das Gewicht des Fadens verlangt.

Zur *Diskussion* kann man die zweite der Gleichungen (7) so schreiben:

$$y = \frac{g}{2c^2}((s - ct)^2 - c^2 t^2) = \frac{g}{2c^2}(s - ct)^2 - \frac{1}{2} g t^2,$$

womit man $s - ct = \mp \sqrt{\frac{2c^2}{g}\left(y + \frac{1}{2} g t^2\right)}$ erhält. Und da die Glieder $at + b$ belanglos sind, da sie nur eine gleichförmige Horizontalbewegung bedeuten, bekommt man x, das ja sonst nur eine Funktion von $s - ct$ ist, in der Form

$$x = F(y + \tfrac{1}{2} g t^2) + at + b;$$

d. h. man hat in einem mit der Beschleunigung g fallenden Raum ξ, η $(= y + \frac{1}{2} g t^2)$, der sich mit der beliebigen, konstanten Geschwindigkeit a horizontal bewegt, eine starre Kurve

$$\xi = F(\eta) = \mp \frac{c^2}{2g}\left\{\arcsin \frac{g}{c^2}\sqrt{\frac{2c^2}{g}\eta} + \frac{g}{c^2}\sqrt{\frac{2c^2}{g}\eta}\sqrt{1 - \frac{g^2}{c^4}\frac{2c^2}{g}\eta}\right\}$$

oder

$$\xi = \mp \frac{c^2}{2g}\left\{\arcsin \sqrt{\frac{2\eta g}{c^2}} + \sqrt{\frac{2\eta g}{c^2}}\sqrt{1 - \frac{2g\eta}{c^2}}\right\}.$$

Setzt man $\frac{2g\eta}{c^2} = \sin^2\varphi$, also $\eta = \frac{c^2}{2g}\sin^2\varphi = \frac{c^2}{4g}(1 - \cos 2\varphi)$; also $s - ct = \mp \sin\varphi \cdot \frac{c^2}{g}$ und präzisiert man das Zeichen von φ so, daß $s - ct = \frac{c^2}{g}\sin\varphi$, so wird $\xi = \frac{c^2}{4g}(2\varphi + \sin 2\varphi)$ und man erkennt, daß man es mit einer gewöhnlichen, spitzen Zykloide zu tun hat.

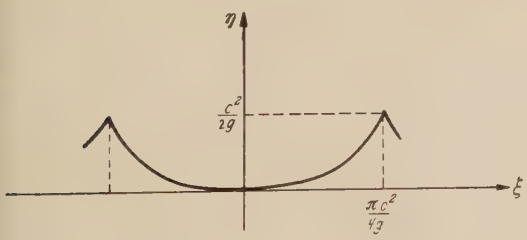

Fig. 6.

Diese Kurve fällt also; man muß aber beachten, daß der Anfangspunkt $s = 0$ gemäß $-ct = \frac{c^2}{g}\sin\varphi$ auf ihr wandert. Für den Endpunkt $s = l$ gilt $l - ct = \frac{c^2}{g}\sin\varphi$, also $\sin\varphi = \frac{g}{c^2}(l - ct)$. Dies ist möglich wegen $l \leqq \frac{c^2}{g}$ und $t < \frac{c}{g}$. Für den äußersten Wert $t = \frac{c}{g}$ müßte $\sin\varphi = \frac{g}{c^2}\left(l - \frac{c^2}{g}\right) = \frac{g}{c^2}l - 1$ sein, was ebenfalls statthaft ist.

3. *Ein Näherungsverfahren.* Wenn die Gleichung der Nr. 2,

$$\varrho\left(\frac{\partial\vartheta}{\partial t}\right)^2 - S\left(\frac{\partial\vartheta}{\partial s}\right)^2 = 0,$$

nicht genau erfüllt, die linke Seite aber klein ist, sei es, daß $\frac{\partial\vartheta}{\partial s}$, also die Krümmung, und $\frac{\partial\vartheta}{\partial t}$, also die Winkelgeschwindigkeit der Fadentangente klein sind, oder aber, daß die beiden Glieder sich nahezu das Gleichgewicht halten, so wird man sie für eine rohe Näherung vernachlässigen können und erhält statt der zweiten Gleichung (2) $\frac{\partial^2 S}{\partial s^2} = 0$, also $S = S_1(t) + a(t)\,s$ mit $a(t) = \frac{S_2(t) - S_1(t)}{l}$, wenn $S_1(t)$ und $S_2(t)$ die beiden positiv vorausgesetzten Randwerte von S sind. Sie seien gegeben. S ist dann stets positiv. Damit wird aus der ersten Gleichung (2)

$$\varrho\frac{\partial^2\vartheta}{\partial t^2} = 2\,a(t)\frac{\partial\vartheta}{\partial s} + (S_1 + a\,s)\frac{\partial^2\vartheta}{\partial s^2}, \tag{8}$$

eine lineare, homogene Gleichung für ϑ. *Wir wollen noch annehmen, daß S_2 und S_1 proportional zueinander seien*, dann sind auch a und S_1 proportional und wir können mit $a(t) = \mu\,S_1(t)$ schreiben

$$\frac{\varrho}{S_1(t)}\cdot\frac{\partial^2\vartheta}{\partial t^2} = 2\,\mu\frac{\partial\vartheta}{\partial s} + (1+\mu\,s)\frac{\partial^2\vartheta}{\partial s^2}.$$

Der alte Ansatz $\vartheta = u(s)\,v(t)$ gibt die gewöhnlichen Differentialgleichungen

$$\frac{d^2v}{dt^2} - \lambda\frac{S_1(t)}{\varrho}v = 0 \tag{9 a}$$

und

$$-\lambda u + 2\mu\frac{du}{ds} + (1+\mu s)\frac{d^2u}{ds^2} = 0 \tag{9 b}$$

mit einer Konstanten λ.

Da $S > 0$, ist auch stets $1 + \mu\,s > 0$ für $0 \leqq s \leqq l$, auch (9 b) ist überall regulär.

Übrigens kann man (9 b) durch Besselsche Funktionen integrieren. Setzt man zunächst

$$1 + \mu\,s = z,$$

so wird aus (9 b)

$$\frac{d^2u}{dz^2} + \frac{2}{z}\frac{du}{dz} - \frac{\lambda}{\mu^2 z}u = 0.$$

Durch die Transformation $z = -\frac{1}{4}\frac{\mu^2}{\lambda}\cdot x^2$, $y = x\cdot u$ erhält man die Differentialgleichung

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{1}{x}\frac{dy}{dx} + \left(1 - \frac{1}{x^2}\right)y = 0,$$

deren Lösung bekanntlich $A_1 J_1(x) + B_1 Y_1(x)$ ist. (J_1 die Besselsche, Y_1 die Neumannsche Funktion vom Parameterwert 1.) Also hat (9 b) die allgemeine Lösung

$$u = \frac{1}{\sqrt{z}}\left\{A J_1\left(\sqrt{\frac{-4\lambda}{\mu^2} z}\right) + B Y_1\left(\sqrt{\frac{-4\lambda}{\mu^2} z}\right)\right\}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1+\mu s}}\left\{A J_1\left(\sqrt{\frac{-4\lambda}{\mu^2}(1+\mu s)}\right) + B Y_1\left(\sqrt{\frac{-4\lambda}{\mu^2}(1+\mu s)}\right)\right\}.$$

Man wird $\lambda > 0$ nehmen. Dann gibt es zwei voneinander unabhängige Lösungen $u_1(s)$ und $u_2(s)$, von denen die erste für $s = 0$, die zweite für $s = l$ verschwindet, während die andere 1 ist. Dies erkennt man sowohl direkt aus den Eigenschaften der Besselschen Funktionen als auch daraus, daß man die Gleichung (9 b) durch die Transformation

$$u = \frac{1}{z} w$$

auf die Form

$$\frac{d^2 w}{d z^2} - \frac{\lambda}{\mu^2 z} w = 0$$

bringen kann, woraus die Behauptung unmittelbar folgt, weil stets $\frac{d^2 w}{d z^2} > 0$ ist.

(9 a) hat ein Fundamentalsystem $v_1(t)$ und $v_2(t)$ so, daß $\begin{cases} v_1(0)=1,\ \dot{v}_1(0)=0 \\ v_2(0)=0,\ \dot{v}_2(0)=1 \end{cases}$ ist. Setzt man jetzt das Integral an

$$\vartheta = \int_0^\infty u v d\lambda = \int_0^\infty [A(\lambda) u_1(\lambda, s) + B(\lambda) u_2(\lambda, s)]\,[C(\lambda) v_1(\lambda, t) + D(\lambda) v_2(\lambda, t)]\, d\lambda,$$

so ist

$$\vartheta(0, s) = \int_0^\infty [A(\lambda) u_1(\lambda, s) + B(\lambda) u_2(\lambda, s)]\, C(\lambda)\, d\lambda,$$

$$\left(\frac{\partial \vartheta}{\partial t}\right)_{t=0} = \int_0^\infty [A(\lambda) u_1(\lambda, s) + B(\lambda) u_2(\lambda, s)] \cdot D(\lambda)\, d\lambda,$$

$$\vartheta(t, 0) = \int_0^\infty B(\lambda)\,[C(\lambda) v_1(\lambda, t) + D(\lambda) v_2(\lambda, t)]\, d\lambda,$$

$$\vartheta(t, l) = \int_0^\infty A(\lambda)\,[C(\lambda) v_1(\lambda, t) + D(\lambda) v_2(\lambda, t)]\, d\lambda.$$

Aus diesen vier Integralgleichungen erster Art wären die vier unbekannten Funktionen AC, BC, AD, BD zu bestimmen. Diese Aufgabe werde nicht weiter erörtert.

Ist aber ein freies Ende da, also $S_2(t) \equiv 0$, so wird $\mu = -\frac{1}{l}$

$$u = \frac{1}{\sqrt{l-s}}\{A \cdot J_1(\sqrt{-4\lambda(l-s)}) + B Y_1(\sqrt{-4\lambda(l-s)})\}.$$

Von dieser Lösung ist der erste Teil brauchbar, da J_1 den Faktor $\sqrt{-2\lambda(l-s)}$ trägt, der zweite aber nicht, da er für $s = l$ unendlich wird; also ist jetzt

$$\vartheta = \int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{l-s}} J_1\left(\sqrt{-4\lambda(l-s)}\right)\left(C(\lambda)\, v_1(\lambda, t) + D(\lambda)\, v_2(\lambda, t)\, d\lambda\right.$$

anzusetzen. Man kann jetzt zur Bestimmung von $C(\lambda)$ und $D(\lambda)$ wohl noch zwei Bedingungen ansetzen, aber nicht mehr vier. Etwa

$$\vartheta(0, s) = \int_{-\infty}^0 \frac{1}{\sqrt{l-s}} J_1\left(\sqrt{-4\lambda(l-s)}\right) C(\lambda)\, d\lambda,$$

$$\frac{\partial \vartheta}{\partial t}(0, s) = \int_{-\infty}^0 \frac{1}{\sqrt{l-s}} J_1\left(\sqrt{-4\lambda(l-s)}\right) D(\lambda)\, d\lambda.$$

Ist das andere Ende ($s = 0$) festgehalten, so ist das dortige S, also $S_1(t)$ als Reaktionsgröße unbekannt. Es ist die Frage, wie weit sie aus einer anderen Randbedingung, etwa über $\vartheta(t, 0)$ oder $\dot{\vartheta}(t, 0)$ bestimmt werden kann. Dazu siehe Nr. 5 am Schluß.

4. *Ein verallgemeinertes und schrittweise verbessertes Näherungsverfahren.* Eine Gleichung von der Form (8), nämlich die ursprüngliche Gleichung (2; 1)

$$\varrho \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial t^2} = 2 \frac{\partial S}{\partial s} \frac{\partial \vartheta}{\partial s} + S \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial s^2}$$

wird man, wenn $S > 0$ als gegeben aufgefaßt wird, nach Cauchy und Riemann mit folgenden Randbedingungen integrieren können. Auf OA sei $\vartheta(0, t)$ gegeben, auf CB sei $\vartheta(l, t)$ gegeben, ferner auf OC die Werte von $\vartheta(s, 0)$ und $\left(\frac{\partial \vartheta(s, t)}{\partial t}\right)_{t=0}$. Stetiger Anschluß in O und C vorausgesetzt. AP und BP seien je eine Charakteristik, d. h. eine zur Differentialgleichung $\varrho\, ds^2 = S\, dt^2$ zugehörige Integralkurve[7]). Die nötige Verallgemeinerung des Cauchyschen Satzes ist in der Literatur vorhanden[8]), die Verallgemeinerung der Riemannschen Methode ist leicht auszuführen. Wir wollen den behaupteten Satz als

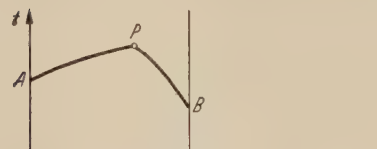

Fig. 7.

[7]) Vgl. Fußnote [4]).

[8]) Siehe etwa Mason, Math. Ann. **65** (1908), S. 570; A. Myller, ebenda **68** (1910), S. 75ff.; Rellich, ebenda **103**. Ältere Arbeiten von Picard, Goursat und Hadamard sind hier genannt.

richtig ansehen, unbeschadet dessen, daß eine sorgfältige Durcharbeitung erwünscht wäre. Daß die Gleichung (2, 2)

$$\frac{\partial^2 S}{\partial s^2} - S\left(\frac{\partial \vartheta}{\partial s}\right)^2 = -\varrho\left(\frac{\partial \vartheta}{\partial t}\right)^2$$

wegen $\left(\frac{\partial \vartheta}{\partial s}\right)^2 \geqq 0$ stets bei gegeben gedachtem ϑ unter Einführung der Randbedingungen $S = S_1(t)$ für $s = 0$, $S = S_2(t)$ für $s = l$ erfüllt werden kann, ist klar. *Auch ist leicht zu beweisen, daß, wenn* $S_1 > 0$, $S_2 > 0$, *auch stets* $S \geqq 0$ *ist* in $0 \leqq s \leqq l$. Denn würde S im Intervall negativ, so müßte ein Minimum mit negativem S vorhanden sein, also $\frac{\partial^2 S}{\partial s^2} > 0$, was aber der Gleichung widerspricht; es müßten denn gleichzeitig an der Minimalstelle $\frac{\partial \vartheta}{\partial s}$ und $\frac{\partial \vartheta}{\partial t}$ gleich Null sein. Diese scheinbare Ausnahme kann aber auch leicht erledigt werden.

Nun schlagen wir folgendes Verfahren der schrittweisen Verbesserung ein. Wir lösen erst:

$$\frac{\partial^2 S}{\partial s^2} = 0 \quad \text{zu} \quad S = S_1 + \frac{S_2 - S_1}{l}\, s$$

und dann Gleichung (8), aus der wir einen ersten Näherungswert $\vartheta_1(s, t)$ bestimmen. Mit diesem gehen wir in die Gleichung (2, 2)

$$\frac{\partial^2 S}{\partial s^2} - S\left(\frac{\partial \vartheta_1}{\partial s}\right)^2 = -\varrho\left(\frac{\partial \vartheta_1}{\partial t}\right)^2;$$

und berechnen ein verbessertes S, so fahren wir fort. Der Konvergenzbeweis muß noch erbracht werden.

5. *Ein allgemeiner Satz über die möglichen Randbedingungen bei allgemeiner Stetigkeit und Differenzierbarkeit. Setzt man diese voraus und gibt die Anfangslage und Anfangsgeschwindigkeit beliebig, hält das eine Ende fest, läßt das andere los, so entsteht ein Widerspruch, wenn nicht die Anfangsrichtung im festgehaltenen Punkt eine ganz bestimmte ist*[9]). Es sei zu Anfang $x = x_0(s)$, $y = y_0(s)$; $\dot{x} = u_0(s)$, $\dot{y} = v_0(s)$, wobei natürlich wegen $\left(\frac{\partial x}{\partial s}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial s}\right)^2 = 1$ gewisse Bedingungen für diese vier Funktionen erfüllt sein müssen, nämlich

$$\text{(10)} \qquad \left(\frac{d x_0}{d s}\right)^2 + \left(\frac{d y_0}{d s}\right)^2 = 1 \quad \text{und} \quad \frac{d x_0}{d s}\frac{d u_0}{d s} + \frac{d y_0}{d s}\frac{d v_0}{d s} = 0.$$

Wenn nun der angehängte Index 0 allgemein die Werte für $t = 0$ bedeutet, so folgt aus den Bewegungsgleichungen (1) bei $X(t) \equiv 0$, $Y(t) = -\varrho g$ bis auf Glieder dritter Ordnung in t

$$x(s, t) = x_0(s) + u_0(s)t + \frac{1}{2\varrho}t^2\left\{\frac{\partial S}{\partial s}\cos\vartheta - S\sin\vartheta\,\frac{\partial \vartheta}{\partial s}\right\}_0,$$

$$y(s, t) = y_0(s) + v_0(s)t + \frac{1}{2\varrho}t^2\left\{-\varrho g + \frac{\partial S}{\partial s}\sin\vartheta + S\cos\vartheta\,\frac{\partial \vartheta}{\partial s}\right\}_0$$

[9]) Dazu siehe PAILLOUX, l. c.

und daraus

$$\frac{\partial x}{\partial s} = \frac{d x_0}{d s} + \frac{d u_0}{d s} t + \frac{1}{2\varrho} t^2 \left\{ \frac{\partial^2 S}{\partial s^2} \cos\vartheta - 2 \frac{\partial S}{\partial s} \sin\vartheta \frac{\partial \vartheta}{\partial s} - \right.$$
$$\left. - S \cos\vartheta \left(\frac{\partial \vartheta}{\partial s}\right)^2 - S \sin\vartheta \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial s^2} \right\}_0,$$

$$\frac{\partial y}{\partial s} = \frac{d y_0}{d s} + \frac{d v_0}{d s} t + \frac{1}{2\varrho} t^2 \left\{ \frac{\partial^2 S}{\partial s^2} \sin\vartheta + 2 \frac{\partial S}{\partial s} \cos\vartheta \frac{\partial \vartheta}{\partial s} - \right.$$
$$\left. - S \sin\vartheta \left(\frac{\partial \vartheta}{\partial s}\right)^2 + S \cos\vartheta \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial s^2} \right\}_0.$$

Daraus ergibt sich weiter außer (10) wegen $\left(\frac{\partial x}{\partial s}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial s}\right)^2 = 1$ wieder bei Berücksichtigung von Gliedern zweiter Ordnung in t

$$0 = t^2 \left\{ \left(\frac{d u_0}{d s}\right)^2 + \left(\frac{d v_0}{d s}\right)^2 + \frac{1}{\varrho} \left(\frac{\partial^2 S}{\partial s^2} - S \left(\frac{\partial \vartheta}{\partial s}\right)^2 \right)_0 \right\};$$

benutzt ist dabei

$$\frac{d x_0}{d s} = \cos\vartheta_0, \quad \frac{d y_0}{d s} = \sin\vartheta_0.$$

Folglich muß S_0 die Differentialgleichung

$$\frac{d^2 S_0}{d s^2} - S_0 k_0^2 = -\varrho \left[\left(\frac{d u_0}{d s}\right)^2 + \left(\frac{d v_0}{d s}\right)^2 \right] = -\varrho \left(\frac{\partial \vartheta}{\partial t}\right)_0^2$$

erfüllen[10]). Diese Gleichung hat bei gegebenem k_0^2 und $\left(\frac{\partial \vartheta}{\partial t}\right)_0^2$ eine Lösung der Form

$$S = A(s) + C_1 B(s) + C_2 C(s),$$

wo $A(s)$ eine Partikularlösung ist, $B(s)$ und $C(s)$ der homogenen Gleichung genügen:

$$\frac{d^2 B}{d s^2} - k_0^2 B = 0 \quad \text{bzw.} \quad \frac{d^2 C}{d s^2} - k_0^2 C = 0.$$

Man kann noch $B(0) = 0$, $\frac{d B}{d s}(0) = 1$; $C(l) = 0$, $\frac{d C}{d s}(l) = 1$ vorschreiben, und es ist nicht C proportional zu B, weil $k_0^2 \geqq 0$ ist. Da nun $S = 0$ für $s = l$ sein soll (freies Ende), so folgt

$$C_1 B(l) = -A(l) \quad \text{und} \quad S = A(s) - \frac{A(l)}{B(l)} B(s) + C_2 C(s).$$

Soll nun $x(0, t) \equiv 0$, $y_0(0, t) \equiv 0$ sein, so müßte außer $x_0(0) = 0$, $y_0(0) = 0$, $u_0(0) = 0$, $v_0(0) = 0$ noch

$$\left(\frac{\partial S}{\partial s} \cos\vartheta - S \sin\vartheta \frac{\partial \vartheta}{\partial s} \right)_{\substack{s=0 \\ t=0}} = 0,$$

$$\left(-\varrho g + \frac{\partial S}{\partial s} \sin\vartheta + S \cos\vartheta \frac{\partial \vartheta}{\partial s} \right)_{\substack{t=0 \\ s=0}} = 0$$

---

[10]) Das ist natürlich (2, 2).

erfüllt sein. D. h. aber

$$\left(\frac{\partial S}{\partial s}\right)_{0,0} = \varrho g \sin \vartheta_{0,0},$$
$$(Sk)_{0,0} = \varrho g \cos \vartheta_{0,0}.$$

Der Doppelindex 0, 0 bedeutet: $t = 0$, $s = 0$.

Setzt man obigen Wert von S ein, so erhält man

$$A'(0) - \frac{A(l)}{B(l)} + C_2 C'(0) = \varrho g \sin \vartheta_{0,0},$$
$$k_{0,0}(A(0) + C_2 C(0)) = \varrho g \cos \vartheta_{0,0}.$$

$C(0)$ ist sicher nicht Null, da sonst $C(s)$ und $B(s)$ proportional sein müßten, also kann man aus der zweiten Gleichung C_2 eliminieren und in die erste einsetzen (falls nicht $k_{0,0} = 0$ ist) und erhält so eine Bedingung für $\vartheta_{0,0}$, wie behauptet wurde. Denn alle sonst vorkommenden Größen sind wohl bestimmt. Sollte aber $k_{0,0} = 0$ sein, so folgte dasselbe und zwar $\cos \vartheta_{0,0} = 0$. Gibt man beispielsweise $u_0 \equiv 0$, $v_0 \equiv 0$, $k =$ konst, so ist $S = C_2 \operatorname{Sin} k(l-s)$ und die Gleichungen für C_2 und $\vartheta_{0,0}$ heißen

$$-C_2 k \operatorname{Cof} kl = \varrho g \sin \vartheta_{0,0},$$
$$C_2 k \operatorname{Sin} kl = \varrho g \cos \vartheta_{0,0},$$

also

$$\operatorname{tg} \vartheta_{0,0} = -\operatorname{Ctg} \cdot kl.$$

Wenn etwa k sehr klein ist, der Faden zu Anfang nahezu gestreckt ist, wird $\operatorname{tg} \vartheta_{0,0}$ sehr groß negativ, also $\vartheta_{0,0}$ nahezu $-\frac{\pi}{2}$, d. h. der Faden muß zu Anfang nahezu senkrecht herabhängen.

(Eingegangen am 24. Dezember 1941.)

Der n-Teilungskörper eines abstrakten elliptischen Funktionenkörpers als Klassenkörper, nebst Anwendung auf den Mordell-Weilschen Endlichkeitssatz.

Herrn Konrad Knopp

zum 60. Geburtstag am 22. Juli 1942 gewidmet.

Von

Helmut Hasse aus Göttingen, z. Z. in Berlin.

Inhalt.

Einleitung 48
§ 1. Der μ-Teilungskörper 51
§ 2. Die Kummer-Erzeugung und das Kummer-Zerlegungsgesetz für den n-Teilungskörper 55
§ 3. Das Klassenkörper-Zerlegungsgesetz für den n-Teilungskörper . . . 58
§ 4. Der Mordell-Weilsche Endlichkeitssatz 61

Einleitung.

Wir betrachten einen algebraischen Funktionenkörper K einer Unbestimmten vom Geschlecht $g = 1$ über einem vollkommenen Konstantenkörper Ω.

In einigen meiner früheren Arbeiten[1]), sowie in zwei Arbeiten von Deuring[2]), die sich zur Hauptsache mit dem Beweis der Riemannschen Vermutung im Falle eines endlichen Ω befassen, spielt der μ-Teilungskörper $K/K\mu$ von K/Ω, wo μ ein beliebiger Multiplikator von $K\ \Omega$ ist, eine wichtige Rolle. Allerdings handelt es sich dort genauer um den μ-Teilungskörper $\bar{K}\ \bar{K}\mu$ der algebraisch-abgeschlossenen Konstantenerweiterung $\bar{K}\ \bar{\Omega}$ von $K\ \Omega$[3]); die ganze Theorie wird nämlich in diesen Arbeiten, ehe die Anwendung auf endliches Ω erfolgt, zunächst für algebraisch-abgeschlossenes Ω entwickelt.

[1]) H. Hasse, Zur Theorie der abstrakten elliptischen Funktionenkörper I, II, III. J. reine angew. Math. **175** (1936); im folgenden zitiert mit H I, II, III.

[2]) M. Deuring, Arithmetische Theorie der Korrespondenzen algebraischer Funktionenkörper I, II. J. reine angew. Math. **177** (1937); **183** (1940); im folgenden zitiert mit D I, II.

[3]) Ich verwende ohne nochmalige Erklärung eine Reihe von Begriffsbildungen und Ausdrucksweisen, wie ich sie in einer im Druck befindlichen Arbeit entwickelt habe: H. Hasse, Zur arithmetischen Theorie der algebraischen Funktionenkörper. Jahresber. Deutsche Math.-Ver. **52** (1942); im folgenden zitiert mit A.

Im Falle, daß der Grad $N(\mu)$ des μ-Teilungskörpers $\bar{K}/\bar{K}\mu$ nicht durch die Charakteristik von Ω teilbar ist, erweist sich $\bar{K}/\bar{K}\mu$, wie wir unten noch einmal näher ausführen werden, als unverzweigt und abelsch, mit der Gruppe der Translationen um die μ-Teilungsklassen als Galois-Gruppe, und mit dem folgenden einfachen Zerlegungsgesetz: Jeder Primdivisor $\bar{\mathfrak{p}}\mu$ von $\bar{K}\mu/\bar{\Omega}$ zerfällt in $N(\mu)$ verschiedene Primdivisoren $\mathfrak{q}$ von $\bar{K}/\bar{\Omega}$, nämlich in die $N(\mu)$ Lösungen von $\mu\bar{\mathfrak{q}} = \bar{\mathfrak{p}}$.

Es ist nun von Interesse zu fragen, welches Zerlegungsgesetz im μ-Teilungskörper $K/K\mu$ von K/Ω selbst gilt, wenn nur Ω von vornherein so umfassend vorausgesetzt wird, daß $K/K\mu$ galoissch und damit abelsch ist; die letztere Voraussetzung kann durch eine endlich-algebraische Konstantenerweiterung verwirklicht werden. Zu dieser Frage stellen wir folgende allgemeine Bemerkung voran.

In der Theorie der endlich-algebraischen Zahlkörper sind die Restklassenkörper der Primdivisoren endliche Körper und als solche durch alleinige Angabe ihres Grades gekennzeichnet. Daher genügt in dieser Theorie zur Beschreibung eines Zerlegungsgesetzes für einen galoisschen Relativkörper (von den endlich vielen verzweigten Primdivisoren abgesehen) die Angabe des gemeinsamen Relativgrades der Primfaktoren für jeden Primdivisor des Grundkörpers. In der Theorie der algebraischen Funktionenkörper über einem Körper Ω sind die Restklassenkörper der Primdivisoren endlich-algebraische Erweiterungen von Ω, also nicht mehr durch alleinige Angabe ihres Grades gekennzeichnet. Daher genügt hier zur Beschreibung eines Zerlegungsgesetzes nicht mehr die bloße Angabe des Relativgrades der Primfaktoren; es müssen vielmehr ihre Restklassenkörper selbst als Relativkörper über Ω angegeben werden. Für einen galoisschen (abelschen) Relativkörper sind diese Restklassenkörper selbst galoissch (abelsch) über Ω und hängen nur von dem Primdivisor des Grundkörpers ab (Theorie der Zerlegungsgruppe).

Wir begnügen uns im folgenden mit dem Studium der Zerlegung der Primdivisoren ersten Grades $\mathfrak{p}\mu$ von $K\mu/\Omega$. Die $\mathfrak{p}\mu$ zusammensetzenden Primdivisoren $\mathfrak{q}$ von K/Ω ergeben sich, indem man die Lösungen $\bar{\mathfrak{q}}$ von $\mu\mathfrak{q} = \mathfrak{p}$ in $\bar{K}/\bar{\Omega}$ zu vollständigen Systemen in bezug auf Ω konjugierter zusammenfaßt. Es handelt sich dann um die Angabe des nur von $\mathfrak{p}$ abhängigen Restklassenkörpers

$$\Omega_{\mathfrak{p}} = \Omega(\mathfrak{q}) = \Omega(\bar{\mathfrak{q}}),$$

der durch Adjunktion der Reste der Elemente aus K für irgendein zu $\mathfrak{p}$ gehöriges $\mathfrak{q}$ (oder — was wesentlich dasselbe — für irgendein zu $\mathfrak{p}$ gehöriges $\bar{\mathfrak{q}}$) zu Ω entsteht. Ein Zerlegungsgesetz für die Primdivisoren ersten Grades $\mathfrak{p}\mu$ von $K\mu/\Omega$ muß diese Restklassenkörper $\Omega_{\mathfrak{p}}$ durch Eigenschaften von $\mathfrak{p}$ kennzeichnen.

Wir werden nun im folgenden ein solches Zerlegungsgesetz für den Fall eines natürlichen Multiplikators $\mu = n$ herleiten, und zwar wird sich zeigen, daß in diesem Falle ein umkehrbar eindeutiger und isomorpher Zusammenhang zwischen der Kummer-Erzeugung des Restklassenkörpers $\Omega_\mathfrak{p}$ und der n-Klasse des Primdivisors $\mathfrak{p}$ besteht. Dabei werden zwei Primdivisoren ersten Grades $\mathfrak{p}$ und $\mathfrak{p}'$ von K/Ω dann und nur dann zur gleichen n-Klasse gerechnet, wenn die von $\frac{\mathfrak{p}'}{\mathfrak{p}}$ repräsentierte rationale Nullklasse die n-te Potenz einer rationalen Nullklasse von K/Ω ist. Das Zerlegungsgesetz ist demnach vom Typus der aus der Klassenkörpertheorie der algebraischen Zahlkörper bekannten Zerlegungsgesetze, und es hat in seiner Isomorphieaussage überdies eine gewisse Ähnlichkeit mit dem Artinschen Reziprozitätsgesetz der Klassenkörpertheorie. Wir kommen unten darauf noch näher zurück.

Dieses Zerlegungsgesetz hat sich in einem von mir geleiteten Göttinger Seminar[4]) unter Mitarbeit von Frl. H. v. Caemmerer ergeben, und zwar bei unseren Bemühungen, den bekannten Endlichkeitssatz von Weil[5]) reinalgebraisch zu beweisen. Bei diesem Endlichkeitssatz handelt es sich um einen algebraischen Funktionenkörper K/Ω einer Unbestimmten von beliebigem Geschlecht g über einem endlich-algebraischen Zahlkörper Ω als Konstantenkörper. Der Satz besagt, daß die rationale Nullklassengruppe D von K/Ω (die in bekannter Weise als Additionsgruppe der rationalen g-gliedrigen Punktgruppen von K/Ω darstellbar ist) endlichen Rang hat. Der Weilsche Beweis dieses Satzes stützt sich auf die analytische Theorie der n-Teilung der zu K/Ω gehörigen Abelschen Funktionen, und zwar kommt er mit der speziellen Teilungszahl $n = 2$ aus. Es wird dort in analytischer Form ein Zusammenhang zwischen einer ad hoc konstruierten Klasseneinteilung der rationalen Punktgruppen und der durch Thetafunktionen dargestellten Kummer-Erzeugung des Zweiteilungskörpers entwickelt, der für $g = 1$ in den Spezialfall $n = 2$ des in dieser Arbeit behandelten Zerlegungsgesetzes übergeht. Für $g = 1$ geht der Weilsche Endlichkeitssatz bereits auf Mordell[6]) zurück, dessen Beweis[7]) sich auf die klassischen Zweiteilungsformeln der elliptischen Funktionen stützt und wesentlich frei von Analysis ist.

Wenn ich hier aus dem Zerlegungsgesetz für den n-Teilungskörper einen neuen Beweis des Mordell-Weilschen Endlichkeitssatzes für $g = 1$ herleite,

[4]) Eine Ausarbeitung dieses Seminars vom S. S. 1938 befindet sich in der Bücherei des Mathematischen Instituts Göttingen.

[5]) A. Weil, L'arithmétique sur les courbes algébriques. Acta math. **52** (1928).

[6]) L. J. Mordell, On the rational solutions of the indeterminate equations of the third and fourth degree. Proc. Cambridge Phil. Soc. **21** (1922), part 3.

[7]) Siehe auch die Weilsche Fassung dieses Beweises: A. Weil, Sur un théorème de Mordell. Bull. Scienc. Math. **54** (1930).

so geschieht das aus den folgenden drei Gründen: Erstens arbeitet der ursprüngliche Mordellsche Beweis und auch die Weilsche Fassung mit den speziellen Formeln der Zweiteilung der elliptischen Funktionen. Er mag deshalb zwar kürzer sein, ist aber sicher weniger durchsichtig als mein Beweis. Zweitens erscheint es mir befriedigend, den Weilschen Endlichkeitssatz, der ja eine ganz allgemeine Strukturaussage ist, auch im Zuge der allgemeinen Strukturtheorie der algebraischen Funktionenkörper einer Unbestimmten zu beweisen und ihn so in dieser Theorie an wohlbestimmter Stelle fest zu verankern. Drittens sehe ich in der Befreiung von den speziellen Formeln der Zweiteilung und in der Einordnung in die allgemeine Strukturtheorie für $g = 1$ eine wesentliche Vorarbeit für einen rein-algebraischen Beweis des Weilschen Endlichkeitssatzes auch für $g > 1$.

Einen solchen allgemeinen Beweis zu geben, und dabei auch die bisher nur ganz wenigen restlos klare Weilsche Distributionslehre für algebraische Funktionenkörper mehrerer Unbestimmten in derjenigen Klarheit, Prägnanz und strukturellen Durchsichtigkeit zu entwickeln, durch die sich die arithmetische Theorie der algebraischen Funktionenkörper auszeichnet, erscheint mir als eine sehr lohnende und dankenswerte Aufgabe. Neben dieser Aufgabe, für die das hier bewiesene Zerlegungsgesetz auf den n-Teilungskörper des Abelschen Funktionenkörpers eines algebraischen Funktionenkörpers K/Ω vom Geschlecht $g > 1$ zu verallgemeinern ist, wäre es ferner interessant, in diesem Zerlegungsgesetz noch die hier gemachten Beschränkungen auf Primdivisoren ersten Grades und auf natürliche Multiplikatoren aufzuheben, was wohl beides nicht schwer ist.

§ 1.

Der μ-Teilungskörper[8]).

1. Es sei μ ein (eigentlicher) Meromorphismus von K/Ω (H II, § 2), also ein Isomorphismus von K/Ω auf einen Teilkörper $K\mu/\Omega$, der als hinterer Operator geschrieben wird. Der Relativkörper $K/K\mu$ heißt der μ-Teilungskörper von K/Ω. Sein Relativgrad $N(\mu) = [K : K\mu]$ (Norm von μ) ändert sich nicht bei Übergang zu einer Konstantenerweiterung von K/Ω. Dem Meromorphismus μ entspricht umkehrbar eindeutig eine (nicht-konstante) Korrespondenz von K/Ω auf sich (D I, §§ 2, 5), die als vorderer Operator

[8]) Die in diesem Paragraphen zusammengestellten Tatsachen finden sich im wesentlichen bereits in H II, § 2, D I, §§ 2, 5 und D II, § 4. Jedoch ist dort die Theorie des μ-Teilungskörpers nicht Selbstzweck, und außerdem lassen sich die in H II gegebenen Beweise zum großen Teil durch die Methodik von D I, II beträchtlich vereinfachen. Daher gebe ich hier eine kurze übersichtliche Zusammenstellung der wesentlichen Tatsachen über den μ-Teilungskörper.

geschrieben wird. Sie stellt sich im Bereich der algebraischen Punkte $\bar{\mathfrak{q}}$ von K/Ω (A, § 1, **3**) durch die Formel dar:

$$\mu\bar{\mathfrak{q}} = N_{\bar{K}|\bar{K}\mu}(\bar{\mathfrak{q}})\mu^{-1}. \tag{1}$$

Durch Anwendung dieser Korrespondenz auf die algebraische Nullklassengruppe $\bar{D}$ von K/Ω (A, § 4, **1**) entsteht der μ zugeordnete Multiplikator von K/Ω auf sich (D I, § 4), den wir hier unmißverständlich ebenfalls mit μ bezeichnen. Er stellt sich als ein Endomorphismus (Homomorphismus in sich) der Klassengruppe $\bar{D}$ dar. Mit $\mu\bar{D}$ bzw. $\bar{D}_\mu$ seien, wie in A, § 8, **3**, die Gruppen der durch Ausübung von μ auf Klassen aus $\bar{D}$ entstehenden bzw. 1 werdenden Klassen bezeichnet. Es gilt:

Zu jedem algebraischen Punkt $\bar{\mathfrak{p}}$ von K/Ω gibt es einen algebraischen Punkt $\bar{\mathfrak{q}}$ von K/Ω mit $\mu\bar{\mathfrak{q}} = \bar{\mathfrak{p}}$, und wenn $N(\mu)$ nicht durch Char. Ω teilbar ist, gibt es zu jedem $\bar{\mathfrak{p}}$ genau $N(\mu)$ verschiedene solche $\bar{\mathfrak{q}}$.

Es ist also $\mu\bar{D} = \bar{D}$, d. h. μ stellt sich als Automorphismus von $\bar{D}$ dar; und wenn $N(\mu)$ nicht durch Char. Ω teilbar ist, hat $\bar{D}_\mu$ die Ordnung $N(\mu)$.

Beweis[9]). Die Beziehung $\mu\bar{\mathfrak{q}} = \bar{\mathfrak{p}}$ ist nach (1) gleichbedeutend damit, daß $\bar{\mathfrak{q}}$ einer derjenigen algebraischen Punkte von K/Ω ist, die in dem algebraischen Punkt $\bar{\mathfrak{p}}\,\mu$ von $K\mu/\Omega$ enthalten sind. Hiernach besitzt $\mu\bar{\mathfrak{q}} = \bar{\mathfrak{p}}$ für jedes $\bar{\mathfrak{p}}$ eine Lösung $\bar{\mathfrak{q}}$. Durch Division mit einer festen Beziehung $\mu\bar{\mathfrak{q}}_0 = \bar{\mathfrak{p}}_0$ folgt daraus $\mu\bar{D} = \bar{D}$. Die Zerlegung des Primdivisors $\mathfrak{p}\mu$ von $\bar{K}\mu/\bar{\Omega}$ in Primdivisoren $\bar{\mathfrak{q}}$ von $\bar{K}/\bar{\Omega}$ hat ferner nach dem Gesagten die Form

$$\bar{\mathfrak{p}}\,\mu = \prod_{\mu\bar{\mathfrak{q}} = \bar{\mathfrak{p}}} \bar{\mathfrak{q}}^{e_{\bar{\mathfrak{q}}}} \quad \text{mit} \quad \sum_{\mu\bar{\mathfrak{q}} = \bar{\mathfrak{p}}} e_{\bar{\mathfrak{q}}} = N(\mu),$$

wo die Verzweigungsordnungen $e_{\bar{\mathfrak{q}}}$ zunächst nicht bekannt sind. Die Anzahl der verschiedenen Primfaktoren in dieser Zerlegung ist gleich der Lösungsanzahl von $\mu\bar{\mathfrak{q}} = \bar{\mathfrak{p}}$. Durch Division mit $\mu\bar{\mathfrak{q}}_0 = \bar{\mathfrak{p}}$, wo $\bar{\mathfrak{q}}_0$ eine feste Lösung ist, folgt, daß diese Anzahl gleich der Ordnung von $\bar{D}_\mu$ und daher von $\bar{\mathfrak{p}}$ unabhängig ist. Ist also $N(\mu)$ nicht durch Char. Ω teilbar, so daß $\bar{K}/\bar{K}\mu$ separabel ist und daher mindestens ein $\bar{\mathfrak{p}}\,\mu$ unverzweigt bleibt, so sind notwendig alle $\mathfrak{p}\mu$ unverzweigt, d. h. alle $e_{\bar{\mathfrak{q}}} = 1$, und $\bar{D}_\mu$ hat die Ordnung $\sum_{\mu\bar{\mathfrak{q}} = \bar{\mathfrak{p}}} 1 = N(\mu)$, wie behauptet. Der Beweis ergibt überdies:

---

[9]) Siehe schon H II, § 2 und für beliebiges Geschlecht A, § 8, **3**. Der hier gegebene Beweis ersetzt die Anwendung der Relativgeschlechtsformel in H II, § 2 durch eine direktere Schlußweise, wie es für die Verallgemeinerung in A, § 8, **3** erforderlich war. Für den hier beiseite gelassenen Fall, daß $N(\mu)$ durch Char. Ω teilbar ist, siehe H II, § 2.

Ist $N(\mu)$ nicht durch Char. Ω teilbar, so ist $\overline{K}\,\overline{K}\mu$ unverzweigt, und das Zerlegungsgesetz für $\overline{K}/\overline{K}\mu$ lautet:

$$\bar{\mathfrak{p}}\,\mu = \prod_{\mu\,\bar{\mathfrak{q}} = \bar{\mathfrak{p}}} \bar{\mathfrak{q}}.$$

2. Es sei A eine rationale Nullklasse von K/Ω (A, § 4, **1**). Ferner sei n eine natürliche Zahl und $\mathfrak{o}$ ein rationaler Punkt von K/Ω; die Existenz eines solchen kann auf Grund einer endlich-algebraischen Konstantenerweiterung vorausgesetzt werden. Schließlich bedeute $\mathfrak{x}$ einen transzendenten Punkt von K/Ω (A, § 5, **2**). Durch die Äquivalenzen

$$\tau_A\,\mathfrak{x} \sim \mathfrak{x}\,A, \quad \frac{n_{\mathfrak{o}}\,\mathfrak{x}}{\mathfrak{o}} \sim \left(\frac{\mathfrak{x}}{\mathfrak{o}}\right)^n$$

werden dann Meromorphismen τ_A, $n_{\mathfrak{o}}$ von K/Ω definiert (A, § 6), indem durch $\mathfrak{x} \to \tau_A\,\mathfrak{x}$, $\mathfrak{x} \to n_{\mathfrak{o}}\,\mathfrak{x}$ Meromorphismen des zu K/Ω isomorphen Körpers $\mathsf{K} = \Omega(\mathfrak{x})$ gegeben sind. τ_A heißt die Translation um die Klasse A und $n_{\mathfrak{o}}$ die n-Multiplikation mit dem Bezugspunkt $\mathfrak{o}$. Aus dem Additionstheorem (D I, § 2) ergeben sich[10]) für die zugeordneten Korrespondenzen von K/Ω im Bereich der algebraischen Punkte $\bar{\mathfrak{q}}$ von K/Ω die zur Definition von τ_A, $n_{\mathfrak{o}}$ analogen Formeln:

$$\tau_A\,\bar{\mathfrak{q}} \sim \bar{\mathfrak{q}}\,A, \quad \frac{n_{\mathfrak{o}}\,\bar{\mathfrak{q}}}{\mathfrak{o}} \sim \left(\frac{\bar{\mathfrak{q}}}{\mathfrak{o}}\right)^n.$$

Die diesen Korrespondenzen zugeordneten Multiplikatoren stellen sich demgemäß durch die Formeln dar:

$$\tau_A\,\overline{C} = \overline{C}, \quad n_{\mathfrak{o}}\,\overline{C} = \overline{C}^n,$$

wo $\overline{C}$ die algebraischen Nullklassen von K/Ω durchläuft. Die Translationen τ_A lassen also als Multiplikatoren die algebraischen Nullklassen von K/Ω invariant; die n-Multiplikation $n_{\mathfrak{o}}$ ist als Multiplikator unabhängig vom Bezugspunkt $\mathfrak{o}$ und bedeutet einfach die Potenzierung mit n in der Gruppe $\overline{D}$. Die Translationen τ_A sind Automorphismen von K/Ω, es ist also $N(\tau_A) = 1$, und nach (1) gilt für sie:

$$\tau_A\,\bar{\mathfrak{q}} = \bar{\mathfrak{q}}\,\tau_A^{-1}.$$

Sie lassen hiernach nicht nur als Multiplikatoren, sondern auch als Automorphismen die Klassen aus $\overline{D}$ invariant. Für die n-Multiplikation $n_{\mathfrak{o}}$ gilt $N(n_{\mathfrak{o}}) = n^2$[11]). Der zugehörige Teilkörper $Kn_{\mathfrak{o}}$ hängt nicht vom Bezugspunkt $\mathfrak{o}$ ab, kann also einfach als Kn bezeichnet werden. K/Kn ist dann der n-Teilungskörper von K/Ω.

[10]) Man nehme die hier auftretenden Körper K, K als Körper K, K im Sinne von D I, § 2 und $\mathfrak{x}$, $\tau_A\,\mathfrak{x}$, $n_{\mathfrak{o}}\,\mathfrak{x}$, ... als korrespondenzerzeugende Divisoren $\mathfrak{D}$ von $\mathfrak{K} = K\,\mathsf{K}$ im dortigen Sinne.

[11]) Diese wichtige Formel ergibt sich am einfachsten gemäß D II, § 4. Mein früher aus H I und H III, § 1 kombinierter rechnerischer Beweis ist durch diese einfache begriffliche Schlußweise als überholt anzusehen.

3. Ist wieder μ irgendein Meromorphismus von K/Ω, so heißen die Klassen $\overline{J}$ aus der Gruppe $\overline{D}_\mu$, also die Lösungen von $\mu\overline{J} = 1$ in der Gruppe $\overline{D}$, die μ-Teilungsklassen von K/Ω. Durch eine endlich-algebraische Konstantenerweiterung kann erreicht werden, daß sie rational sind; wir bezeichnen sie dann mit J, ihre Gruppe mit D_μ. Im Anschluß an die oben ausgesprochenen Sätze gilt:

Ist $N(\mu)$ nicht durch Char. Ω teilbar, und sind die μ-Teilungsklassen von K/Ω rational, so ist der μ-Teilungskörper $K\,K\mu$ abelsch, mit der zu D_μ isomorphen Gruppe $\mathfrak{T}_\mu$ der Translationen τ_J um die μ-Teilungsklassen J als Galoisgruppe.

Beweis[12]). Da alle Lösungen $\bar{\mathfrak{q}}$ von $\mu\bar{\mathfrak{q}} = \mathfrak{p}$ aus einer festen $\bar{\mathfrak{q}}_0$ in der Form

$$\bar{\mathfrak{q}} \sim \bar{\mathfrak{q}}_0 J, \quad \text{also} \quad \bar{\mathfrak{q}} = \tau_J \bar{\mathfrak{q}}_0 = \bar{\mathfrak{q}}_0 \tau_J^{-1}$$

entstehen, wo J die μ-Teilungsklassen durchläuft, kann das Zerlegungsgesetz für $\overline{K}/\overline{K}\mu$ in der Form

$$\bar{\mathfrak{p}}\mu = \prod_J \tau_J \bar{\mathfrak{q}}_0 = \prod_J \bar{\mathfrak{q}}_0 \tau_J^{-1}$$

geschrieben werden. Hiernach lassen die Translationsautomorphismen τ_J alle algebraischen Punkte $\mathfrak{p}\mu$ und daher alle Divisoren $\mathfrak{a}\mu$ von $K\mu/\Omega$ invariant. Sie können dann für die Elemente $z\mu$ aus $K\mu$ nur die Multiplikation mit Faktoren $\neq 0$ aus Ω bewirken. Durch Betrachtung von $z\mu + 1$ folgt, daß diese Faktoren durchweg $= 1$ sind. Daher sind die τ_J Automorphismen von $K\,K\mu$. Da ihre Anzahl mit dem Grad $N(\mu)$ von $K\,K\mu$ übereinstimmt, ergibt sich die Behauptung.

4. Für die Elemente z aus K hat man einerseits

$$z\mu \equiv (z\mu)\,(\bar{\mathfrak{q}}) \bmod \bar{\mathfrak{q}}, \quad \text{also auch} \quad \bmod N_{\overline{K}|\overline{K}\mu}(\bar{\mathfrak{q}})$$

und daher nach (1)

$$z \equiv (z\mu)\,(\bar{\mathfrak{q}}) \bmod \mu\bar{\mathfrak{q}},$$

während andererseits natürlich

$$z \equiv z(\mu\bar{\mathfrak{q}}) \bmod \mu\bar{\mathfrak{q}}$$

ist. Durch Vergleich ergibt sich die *Restformel* (H II, § 2):

$$(z\mu)\,(\bar{\mathfrak{q}}) = z(\mu\bar{\mathfrak{q}}). \tag{2}$$

Dabei können die Reste auch ∞ sein; (2) ergibt sich unter Einschluß dieses Falles, indem man neben z auch $\frac{1}{z}$ betrachtet, oder also von einem homogenen Elementsystem $z_0 : z_1 = 1 : z$ ausgeht (A. § 3. **1**). • In (2) steckt demnach als Teilaussage: Dann und nur dann ist $z\mu$ ganz für $\bar{\mathfrak{q}}$, wenn z ganz für $\mu\mathfrak{q}$ ist.

[12]) Für beliebiges Geschlecht siehe wieder A, § 8, **5**.

Wendet man die Restformel (2) auf das Berechnungsschema der Distributionen [A, § 9, (1)—(4)] an, so ergibt sich die analoge Restformel:

(3) $$(\mathfrak{a}\mu)\,(\bar{\mathfrak{q}}) \doteq \mathfrak{a}\,(\mu\,\bar{\mathfrak{q}})$$

für ganze Divisoren $\mathfrak{a}$ von K/Ω. Dabei gilt sogar $=$ statt nur $\doteq$, wenn die beiden Distributionen mittels einer homogenen M-Basis $x_0, \ldots, x_n$ von K/Ω (A, § 3, 2) und der ihr meromorph zugeordneten M_μ-Basis $x_0\mu, \ldots, x_n\mu$ von $K\mu/\Omega$ gebildet werden. Beim Beweis beachte man, daß nach dem zuvor Gesagten einer für $\mu\,\bar{\mathfrak{q}}$ primitiven Normierung von $x_0, \ldots, x_n$ eine für $\bar{\mathfrak{q}}$ primitive Normierung von $x_0\mu, \ldots, x_n\mu$ entspricht.

§ 2.

Die Kummer-Erzeugung und das Kummer-Zerlegungsgesetz für den n-Teilungskörper.

Es sei n eine natürliche Zahl. Wir betrachten den n-Teilungskörper $K\,Kn$ von K/Ω. Dabei machen wir durchweg folgende drei Voraussetzungen, ohne sie immer zu wiederholen:

a) *Es gibt einen rationalen Punkt* $\mathfrak{o}$ *von* K/Ω.

b) *Die n-Teilungsklassen von* K/Ω *sind rational.*

c) n *ist nicht durch Char.* Ω *teilbar.*

a) und b) können durch eine endlich-algebraische Konstantenerweiterung verwirklicht werden, c) wird der Einfachheit halber vorausgesetzt. a) ist schon für die Definition des n-Teilungskörpers gemäß § 1 erforderlich, b) und c) sichern die in § 1 ausgesprochenen Tatsachen für ihn.

1. Kurz zusammengefaßt hat man unter den Voraussetzungen a), b), c) folgenden Tatbestand:

Die n-Teilungsklassen J, also die Lösungen von $J^n = 1$, bilden eine abelsche Gruppe D_n von der Ordnung n^2 und vom Typus (n, n); letzteres ergibt sich gruppentheoretisch, indem man neben n die Teiler von n betrachtet. Der n-Teilungskörper $K\,Kn$ ist unverzweigt und abelsch, mit der zu D_n isomorphen Gruppe $\mathfrak{T}_n$ der Translationen τ_J um die n-Teilungsklassen J als Galoisgruppe. Das Zerlegungsgesetz für die algebraisch-abgeschlossene Konstantenerweiterung $\bar{K}\,\bar{K}n$ (oder also das Zerlegungsgesetz der algebraischen Punkte für K/Kn) lautet:

$$\bar{\mathfrak{p}}\,n_{\mathfrak{o}} = \prod_{n_{\mathfrak{o}}\,\bar{\mathfrak{q}} = \bar{\mathfrak{p}}} \bar{\mathfrak{q}}, \quad \text{wobei} \quad \frac{{}^{n_{\mathfrak{o}}}\mathfrak{q}}{\mathfrak{o}} \sim \left(\frac{\bar{\mathfrak{q}}}{\mathfrak{o}}\right)^n.$$

Man beachte, daß zur Formulierung dieses Zerlegungsgesetzes ein rationaler Bezugspunkt $\mathfrak{o}$ und damit einer der zum Multiplikator n gehörigen Meromorphismen, nämlich $n_{\mathfrak{o}}$, ausgezeichnet werden muß, obwohl der Relativkörper K/Kn selbst unabhängig von $\mathfrak{o}$ ist. Entsprechendes gilt auch für die Formulierung der weiteren Ergebnisse.

2. Wie in der Theorie der Kummer-Erzeugungen üblich, schreiben wir für Elemente z, z' aus K:

$$z \underset{n}{=} z' \text{ in } K, \text{ wenn } z' = zc^n \text{ mit } c \neq 0 \text{ aus } K,$$

und reden in diesem Sinne von den n-Klassen aus K. Unter den Voraussetzungen a), b) folgern wir zunächst:

Kummer-Erzeugung des n-Teilungskörpers. *Ω enthält die n-ten Einheitswurzeln. Dementsprechend besitzt K/Kn eine Kummer-Erzeugung. Diese lautet:*

$$K = Kn(\sqrt[n]{z_J\, n_\mathfrak{o}}).$$

Dabei ist das Elementsystem $z_J\, n_\mathfrak{o}$ aus Kn folgendermaßen erklärt: Es gibt in K ein Elementsystem

$$w_J \cong \frac{\mathfrak{i}\, n_\mathfrak{o}}{\mathfrak{o}\, n_\mathfrak{o}},$$

wo $\frac{\mathfrak{i}}{\mathfrak{o}}$ das auf $\mathfrak{o}$ bezogene Repräsentantensystem der n-Teilungsklassen J durchläuft. Damit ist

$$z_J\, n_\mathfrak{o} = w_J^n.$$

Das zugeordnete Elementsystem z_J aus K ist also durch

$$z_J \cong \left(\frac{\mathfrak{i}}{\mathfrak{o}}\right)^n$$

mit bestimmter Normierung der Faktoren aus Ω gegeben.

Beweis. Wegen $J^n = 1$ ist zunächst klar, daß es zu jeder n-Teilungsklasse J ein Element z_J aus K mit

$$z_J \cong \left(\frac{\mathfrak{i}}{\mathfrak{o}}\right)^n, \quad \text{also} \quad z_J\, n_\mathfrak{o} \cong \left(\frac{\mathfrak{i}\, n_\mathfrak{o}}{\mathfrak{o}\, n_\mathfrak{o}}\right)^n$$

gibt. Nach dem Zerlegungsgesetz für $\bar{K}/\bar{K}n$ ist nun

$$\mathfrak{i}\, n_\mathfrak{o} = \prod_J \tau_J\, \bar{\mathfrak{i}}_0, \quad \mathfrak{o}\, n_\mathfrak{o} = \prod_J \tau_J\, \bar{\mathfrak{o}}_0,$$

wo $\bar{\mathfrak{i}}_0$, $\bar{\mathfrak{o}}_0$ feste (nicht notwendig rationale) Lösungen von

$$n_\mathfrak{o}\, \bar{\mathfrak{i}}_0 = \mathfrak{i}, \quad n_\mathfrak{o}\, \bar{\mathfrak{o}}_0 = \mathfrak{o}$$

sind. Wegen der Invarianz der Nullklassen bei Translationen folgt daraus die Äquivalenz in $\bar{K}$:

$$\frac{\mathfrak{i}\, n_\mathfrak{o}}{\mathfrak{o}\, n_\mathfrak{o}} = \prod_J \tau_J \left(\frac{\bar{\mathfrak{i}}_0}{\bar{\mathfrak{o}}_0}\right) \sim \left(\frac{\bar{\mathfrak{i}}_0}{\bar{\mathfrak{o}}_0}\right)^{n^2}.$$

Nach der Definition von $n_\mathfrak{o}$ gilt ferner in $\bar{K}$:

$$\left(\frac{\bar{\mathfrak{i}}_0}{\bar{\mathfrak{o}}_0}\right)^n \sim n_\mathfrak{o} \left(\frac{\bar{\mathfrak{i}}_0}{\bar{\mathfrak{o}}_0}\right) = \frac{\mathfrak{i}}{\mathfrak{o}}, \quad \text{also} \quad \left(\frac{\bar{\mathfrak{i}}_0}{\bar{\mathfrak{o}}_0}\right)^{n^2} \sim \left(\frac{\mathfrak{i}}{\mathfrak{o}}\right)^n \sim 1.$$

Die damit in $\bar{K}$ festgestellte Beziehung

$$\frac{\mathfrak{i}\, n_\mathfrak{o}}{\mathfrak{o}\, n_\mathfrak{o}} \sim 1$$

gilt wegen der Invarianz der Divisorenäquivalenz auch in K; denn $\mathfrak{i}^{n_0}$, $\mathfrak{o}^{n_0}$ sind ganze Divisoren von K/Ω. Hiernach gibt es zu jeder n-Teilungsklasse J ein Element w_J aus K mit

$$w_J \cong \frac{\mathfrak{i}^{n_0}}{\mathfrak{o}^{n_0}}.$$

Die obengenannten Elemente z_J lassen sich dann durch Faktoren aus Ω so normieren, daß

$$z_J^{n_0} = w_J^n$$

gilt. Eine zulässige Änderung der w_J um Faktoren $\neq 0$ aus Ω ergibt für die z_J eine Änderung um Faktoren $\neq 0$ aus Ω^n, so daß die n-Klassen der normierten z_J in K eindeutig festliegen. Der Multiplikation der J:

$$J_1 J_2 = J$$

entspricht die Multiplikation der $\frac{\mathfrak{i}}{\mathfrak{o}}$ bis auf Faktoren $\neq 0$ aus K, also die Multiplikation der w_J bis auf Faktoren $\neq 0$ aus Kn, und daher die Multiplikation der z_J bis auf Faktoren $\neq 0$ aus K^n, d. h. die n-Klassenmultiplikation der z_J in K:

$$z_{J_1} z_{J_2} \underset{n}{=} z_J \text{ in } K.$$

Da $z_{J_{n}} 1$ in K nur für $J = 1$ gilt, repräsentieren also die z_J eine n-Klassengruppe in K, die zur Gruppe D_n der n-Teilungsklassen J und damit zur Galoisgruppe $\mathfrak{T}_n$ von K/Kn isomorph ist. Hat insbesondere J die genaue Ordnung n, so ist $w_J^n = z_J^{n_0}$ die früheste in Kn gelegene Potenz von w_J. Da K/Kn galoissch ist, sind also die n-ten Einheitswurzeln in Kn und daher in Ω enthalten. Aus der festgestellten Isomorphie folgt dann nach der Theorie der Kummer-Erzeugungen die Behauptung.

Die vollen n-Klassen der z_J in K ergeben übrigens gerade diejenigen Elemente aus K, die n-te Potenzen von Divisoren (nullten Grades) von K/Ω sind, jedes solche Element in einer bestimmten Normierung durch einen Faktor $\neq 0$ aus Ω.

3. Ist $\mathfrak{p}$ ein Primdivisor ersten Grades von K/Ω, so gibt es in der n-Klasse von z_J in K zu $\mathfrak{p}$ prime Vertreter z_J' (für $\mathfrak{p} \neq \mathfrak{o}, \mathfrak{i}$ genügt schon $z_J' = z_J$); denn man kann w_J durch einen Faktor aus Kn prim zu $\mathfrak{p}^{n_0}$ machen. Für alle solchen Vertreter gehören die Reste $z_J'(\mathfrak{p})$ einer und derselben n-Klasse in Ω an. Wir verstehen im folgenden bei Betrachtung eines $\mathfrak{p}$ unter z_J einen zu $\mathfrak{p}$ prim normierten Vertreter der n-Klasse des bisherigen normierten $z_J \sim \left(\frac{\mathfrak{i}}{\mathfrak{o}}\right)^n$, und unter w_J dann eine Lösung von $z_J^{n_0} = w_J^n$. Diese Normierung kann auch gleichzeitig für mehrere $\mathfrak{p}$ vorgenommen werden. Wir beweisen nunmehr:

Kummer-Zerlegungsgesetz für den n-Teilungskörper. *Der Restklassenkörper $\Omega_\mathfrak{p}/\Omega$ der Primdivisoren von K/Ω, die in einem Primdivisor ersten Grades $\mathfrak{p}n_0$ von Kn/Ω aufgehen, wird in Kummer-Erzeugung gegeben durch*

$$\Omega_\mathfrak{p} = \Omega\left(\sqrt[n]{z_J(\mathfrak{p})}\right).$$

Beweis. Bei der getroffenen Normierung sind die $w_J = \sqrt[n]{z_J n_0}$ ganz für $\mathfrak{p}n_0$, und ihre Diskriminante $|S_{K|Kn}(w_J w_{J'})|$ ist prim zu $\mathfrak{p}n_0$. Letzteres sieht man so:

$$S_{K|Kn}(w_J w_{J'}) = \begin{cases} n^2 w_J w_{J'} & \text{für } JJ' = 1 \\ 0 & \text{für } JJ' \neq 1 \end{cases},$$

also

$$|S_{K|Kn}(w_J w_{J'})| = (n^2)^{n^2} \left(\prod_J w_J\right)^2;$$

die w_J sind prim zu $\mathfrak{p}n_0$ normiert, und n enthält — anders als für algebraische Zahlkörper — keinen Primdivisor, da es eine wegen der Voraussetzung c) von Null verschiedene Konstante ist. Demnach bilden die w_J eine $\mathfrak{p}n_0$-Ganzheitsbasis für K/Kn. Ist also $\mathfrak{q}$ ein Primdivisor von K/Ω, der in $\mathfrak{p}n_0$ aufgeht, so erzeugen die $w_J(\mathfrak{q})$ den Restklassenkörper $\Omega(\mathfrak{q}) = \Omega_\mathfrak{p}$ über dem Restklassenkörper $\Omega(\mathfrak{p}n_0) = \Omega$:

$$\Omega_\mathfrak{p} = \Omega(w_J(\mathfrak{q})).$$

Ist nun $\bar{\mathfrak{q}}$ ein in $\mathfrak{q}$ steckender algebraischer Punkt von K/Ω, so ist nach dem Zerlegungsgesetz der algebraischen Punkte $n_0\mathfrak{q} = \mathfrak{p}$, also nach der Restformel § 1, (2)

$$w_J(\mathfrak{q})^n = w_J(\bar{\mathfrak{q}})^n = (z_J n_0)(\bar{\mathfrak{q}}) = z_J(n_0\bar{\mathfrak{q}}) = z_J(\mathfrak{p}).$$

Damit ergibt sich die Behauptung.

§ 3.

Das Klassenkörper-Zerlegungsgesetz für den n-Teilungskörper.

Es mögen nach wie vor die zu Beginn von § 2 gemachten Voraussetzungen a), b), c) gelten.

1. Wir betrachten die n-Klasseneinteilung der rationalen Punkte $\mathfrak{p}$ von K/Ω:

$\mathfrak{p}' \underset{n}{\sim} \mathfrak{p}$, wenn $\mathfrak{p}' \sim \mathfrak{p}C^n$ mit einer rationalen Klasse C von K/Ω.

Die n-Klassen der $\mathfrak{p}$ sind die Nebengruppen ersten Grades zur Untergruppe D^n der rationalen Nullklassengruppe D von K/Ω; erst ihre Quotienten bilden die Faktorgruppe D/D^n. Im Hinblick auf die Definition des Meromorphismus n_0, nach der

$$\mathfrak{p} = n_0\bar{\mathfrak{q}} \quad \text{gleichbedeutend mit} \quad \frac{\mathfrak{p}}{\mathfrak{o}} \sim \left(\frac{\bar{\mathfrak{q}}}{\mathfrak{o}}\right)^n$$

ist, denken wir uns die Faktorgruppe D/D^n durch die n-Klassen der Quotienten $\frac{\mathfrak{p}}{\mathfrak{o}}$ repräsentiert. Ist $\mathfrak{q}, \bar{\mathfrak{q}}'$ ein Lösungspaar von $\mathfrak{p} = n_0 \bar{\mathfrak{q}}$, $\mathfrak{p}' = n_0 \bar{\mathfrak{q}}'$, so bedeutet $\mathfrak{p}' \underset{n}{\sim} \mathfrak{p}$, daß $\mathfrak{q}' \sim \bar{\mathfrak{q}} C J$ mit einer rationalen Klasse C und einer n-Teilungsklasse J von K/Ω ist; wegen der vorausgesetzten Rationalität der J folgt daraus $\Omega(\bar{\mathfrak{q}}') = \Omega(\bar{\mathfrak{q}})$, d. h. $\Omega_{\mathfrak{p}'} = \Omega_{\mathfrak{p}}$. Ferner ist dann und nur dann $\mathfrak{p} = n_0 \mathfrak{q}$ mit rationalem $\mathfrak{q}$, wenn $\mathfrak{p} \underset{n}{\sim} \mathfrak{o}$ ist. Damit haben wir schon folgende beiden Teilaussagen eines Klassenkörper-Zerlegungsgesetzes für K/Kn:

Der Restklassenkörper $\Omega_{\mathfrak{p}}$ hängt nur von der n-Klasse von $\mathfrak{p}$ ab.

Dann und nur dann ist $\mathfrak{p} n_0$ voll-zerlegt, wenn $\mathfrak{p} \underset{n}{\sim} \mathfrak{o}$ ist.

Die letztere Aussage kann nach dem Kummer-Zerlegungsgesetz aus § 2 auch so ausgesprochen werden:

(1) $z_J(\mathfrak{p}) \underset{n}{=} 1$ *in Ω (für alle J) ist gleichbedeutend mit* $\mathfrak{p} \underset{n}{\sim} \mathfrak{o}$.

2. Wir beweisen jetzt darüber hinaus:

Klassenkörper-Zerlegungsgesetz für den n-Teilungskörper. *Das n-Klassensystem der Kummer-Erzeugenden $z_J(\mathfrak{p})$ in Ω des Restklassenkörpers $\Omega_{\mathfrak{p}}/\Omega$ der Primdivisoren von K/Ω, die in einem Primdivisor ersten Grades $\mathfrak{p} n_0$ von Kn/Ω aufgehen, entspricht umkehrbar eindeutig der n-Klasse von $\mathfrak{p}$:*

(2) $z_J(\mathfrak{p}') \underset{n}{=} z_J(\mathfrak{p})$ *in Ω (für alle J) ist gleichbedeutend mit* $\mathfrak{p}' \underset{n}{\sim} \mathfrak{p}$.

Diese eineindeutige Zuordnung wird gegeben durch das Formelsystem:

(3) $$z_J \tau_P \underset{n}{=} z_J(\mathfrak{p}) \cdot z_J \quad \text{in} \quad K,$$

wo P die Klasse von $\frac{\mathfrak{p}}{\mathfrak{o}}$ bezeichnet, und sie ist ein Isomorphismus zwischen der Faktorgruppe D/D^n, repräsentiert durch die n-Klassen PD^n der $\frac{\mathfrak{p}}{\mathfrak{o}}$, und der Multiplikationsgruppe Z_n der n-Klassensysteme der $z_J(\mathfrak{p})$ in Ω.

Beweis. Da z_J die n-te Potenz eines Divisors nullten Grades von K/Ω ist, und da die Translation τ_P die Nullklassen von K/Ω invariant läßt, hat man

$$z_J \tau_P \cong z_J \cdot c_{J,P}^n$$

mit Faktoren $c_{J,P} \neq 0$ aus K, also

$$z_J \tau_P = \gamma_{J,P} \cdot z_J \cdot c_{J,P}^n \underset{n}{=} \gamma_{J,P} \cdot z_J \quad \text{in } K$$

mit Faktoren $\gamma_{J,P} \neq 0$ aus Ω. Diese Faktoren bestimmen sich durch Restbildung mod. $\mathfrak{o}$. Links ist nach der Restformel § 1, (2)

$$(z_J \tau_P)(\mathfrak{o}) = z_J(\tau_P \mathfrak{o}) = z_J(\mathfrak{p}).$$

Rechts ist nach (1)

$$z_J(\mathfrak{o}) \underset{n}{=} 1 \text{ in } \Omega.$$

Man beachte hierbei, daß z_J gleichzeitig zu $\mathfrak{p}$ und $\mathfrak{o}$ prim normiert werden kann. Damit ergibt sich

$$\gamma_{J,P} \underset{n}{=} z_J(\mathfrak{p}) \text{ in } \Omega,$$

also (3). Demnach ist $\tau_P \to z_J(\mathfrak{p})$ ein Homomorphismus der Translationsgruppe $\mathfrak{T}$ der τ_P auf die Multiplikationsgruppe Z_n der n-Klassensysteme der $z_J(\mathfrak{p})$ in Ω. Durch Vorfügung des Isomorphismus $P \to \tau_P$ von D auf $\mathfrak{T}$ entsteht ein Homomorphismus $P \to z_J(\mathfrak{p})$ von D auf Z_n. Nach (1) ist dieser ein Isomorphismus von D/D^n auf Z_n. Damit ist die behauptete Isomorphieaussage und insbesondere auch die Eineindeutigkeitsaussage (2) bewiesen.

3. Es ist interessant zu bemerken, daß in Weils analytischem Beweis seines Endlichkeitssatzes das Formelsystem (3) für ($n = 2$) aus dem Satz über die Vertauschung von Argument und Parameter (hier $\mathfrak{p}$ und $\mathfrak{o}$) in den Elementarintegralen dritter Gattung gefolgert wird. Unsere einfache Schlußweise ist also als die Algebraisierung dieses Satzes anzusehen. Allgemeiner als (3) gilt übrigens nach dem Beweis das Formelsystem:

$$(3') \qquad z_J \tau_{\frac{P}{P'}} \underset{n}{=} \frac{z_J(\mathfrak{p})}{z_J(\mathfrak{p}')} \cdot z_J \text{ in } K,$$

in dem der feste Punkt $\mathfrak{o}$ mit $z_J(\mathfrak{o}) \underset{n}{=} 1$ in Ω durch einen beliebigen rationalen Punkt $\mathfrak{p}'$ von K/Ω ersetzt ist und $\frac{P}{P'}$ die Klasse von $\frac{\mathfrak{p}}{\mathfrak{p}'}$ ist.

Wir bemerken ferner, daß das gewonnene Klassenkörper-Zerlegungsgesetz in seiner Isomorphieaussage den Typus des Artinschen Reziprozitätsgesetzes aus der algebraischen Zahlentheorie hat. An Stelle des dortigen Frobenius-Automorphismus tritt hier das Kummer-Erzeugendensystem $z_J(\mathfrak{p})$ von $\Omega_{\mathfrak{p}}/\Omega$, das aus dem festen Kummer-Erzeugendensystem $z_J n_{\mathfrak{o}}$ von K/Kn durch Restbildung nach dem zu zerlegenden Primdivisor $\mathfrak{p} n_{\mathfrak{o}}$ entsteht. Die durch (3) mit dem System $z_J(\mathfrak{p})$ verknüpfte Translation τ_P kann allerdings nicht als das formale Analogon des Frobenius-Automorphismus angesehen werden, weil sie zwar ein Automorphismus von K/Ω, aber im allgemeinen kein Automorphismus des betrachteten Relativkörpers K/Kn ist. Um dies genaue formale Analogon des Frobenius-Automorphismus zu erhalten, hätte man vielmehr die Zerlegungsgruppe von $\mathfrak{p} n_{\mathfrak{o}}$, als Untergruppe der Galoisgruppe $\mathfrak{T}_n$ von K/Kn, durch die Translationen τ_J darzustellen und dann, vermöge des verschränkten Produktes mit dem Faktorensystem 1 von K/Kn und $\mathfrak{T}_n$, von den $z_J n_{\mathfrak{o}}$ zu den τ_J überzugehen. Dies wäre noch im einzelnen auszuführen, etwa unter Benutzung der Ergebnisse von Teichmüller[13]).

[13]) O. Teichmüller, Verschränkte Produkte mit Normalringen, Multiplikation zyklischer Normalringe. Deutsche Math. **1** (1936).

Da der Satz von der Vertauschung von Argument und Parameter in den Elementarintegralen dritter Gattung ein ganz allgemeines Theorem der analytischen Theorie der algebraischen Funktionen ist, möchte ich auf Grund der vorstehenden beiden Bemerkungen glauben, daß seine rein-algebraische Formulierung und Ausdeutung zu einem ganz allgemeinen Reziprozitätsgesetz Artinscher Art für abelsche Erweiterungen algebraischer Funktionenkörper führen wird, von dem das hier mitgeteilte Ergebnis nur ein einfacher Spezialfall ist (Geschlecht 1, unverzweigte Erweiterung). Ein weiterer Spezialfall, der ebenfalls in diese Richtung weist, liegt in der bereits in allen Einzelheiten bekannten Klassenkörpertheorie der abelschen Erweiterungen von K/Ω bei endlichem Ω vor.

§ 4.

Der Mordell-Weilsche Endlichkeitssatz.

Es sei jetzt Ω ein endlich-algebraischer Zahlkörper. Der zu beweisende Satz lautet:

Die rationale Nullklassengruppe D von K/Ω hat endlichen Rang.

1. Aus dem in § 3 bewiesenen Zerlegungsgesetz für den n-Teilungskörper folgern wir mittels der in A. § 9 gegebenen Darstellung der Distributionslehre zunächst die folgende schwächere Endlichkeitsaussage:

Besitzt K/Ω einen rationalen Punkt und sind die n-Teilungsklassen von K/Ω rational, so ist die Faktorgruppe D/D^n endlich.

Beweis. Nach dem Klassenkörper-Zerlegungsgesetz für K/K_n ist D/D^n isomorph zur Multiplikationsgruppe der n-Klassensysteme der $z_J(\mathfrak{p})$ in Ω, wo $\mathfrak{p}$ die rationalen Punkte von K Ω durchläuft. Es genügt demnach zu zeigen, daß die $z_J(\mathfrak{p})$ nur endlich viele n-Klassen in Ω durchlaufen. Dabei können wir die ursprüngliche Normierung:

$$z_J \simeq \left(\frac{\mathfrak{i}}{\mathfrak{o}}\right)^n$$

aus § 2 zugrunde legen, weil es auf die endlich vielen $\mathfrak{p} = \mathfrak{i}$ (zu denen auch $\mathfrak{o}$ gehört) nicht ankommt. Für $\mathfrak{p} \neq \mathfrak{i}$ folgt aus dem Hauptsatz der Distributionslehre (A, § 9, 7):

$$z_J(\mathfrak{p}) \doteq \left(\frac{\mathfrak{i}(\mathfrak{p})}{\mathfrak{o}(\mathfrak{p})}\right)^n.$$

Dabei seien die Distributionen $\mathfrak{i}(\mathfrak{p})$ [zu denen auch $\mathfrak{o}(\mathfrak{p})$ gehört] auf Grund der Endlichkeit der Divisorenklassenanzahl von Ω zahlnormiert. Dann bedeutet dieses System von Distributionsgleichungen ein System von Zahlgleichungen:

$$z_J(\mathfrak{p}) = \varepsilon_{J,\mathfrak{p}}\, \gamma_{J,\mathfrak{p}} \left(\frac{\mathfrak{i}(\mathfrak{p})}{\mathfrak{o}(\mathfrak{p})}\right)^n,$$

mit Zahlfaktoren $\gamma_{J,\mathfrak{p}} \neq 0$ aus Ω, die einem endlichen Vorrat angehören, und Einheitsfaktoren $\varepsilon_{J,\mathfrak{p}}$ aus Ω. Wegen der Endlichkeit des Einheitenranges von Ω ist auch die Anzahl der durch Einheiten gelieferten n-Klassen in Ω endlich. Daher durchlaufen die $z_J(\mathfrak{p})$ in der Tat nur endlich viele n-Klassen in Ω.

2. Gestützt auf die damit bewiesene schwächere Endlichkeitsaussage wird der Beweis des Endlichkeitssatzes selbst nach dem klassischen Verfahren der descente infinie geführt. Da mit einer abelschen Gruppe auch jede Untergruppe endlichen Rang hat, können wir für diesen Beweis, auf Grund einer endlich-algebraischen Konstantenerweiterung von K/Ω, ohne Einschränkung voraussetzen, daß K/Ω einen rationalen Punkt $\mathfrak{o}$ besitzt, und daß für eine feste natürliche Zahl $n > 1$ (es genügt $n = 2$) die n-Teilungsklassen von K/Ω rational sind, so daß also D/D^n endlich ist. Es gibt dann ein endliches System R von rationalen Punkten $\mathfrak{r}$ von K/Ω derart, daß die Brüche $\frac{\mathfrak{r}}{\mathfrak{o}}$ die endlich vielen Klassen von D/D^n repräsentieren. Wir denken R so gewählt, daß die n-Hauptklasse D^n durch $\frac{\mathfrak{o}}{\mathfrak{o}} = 1$ und zueinander reziproke n-Klassen durch Paare $\frac{\mathfrak{r}}{\mathfrak{o}}, \frac{\bar{\mathfrak{r}}}{\mathfrak{o}}$ mit $\frac{\mathfrak{r}}{\mathfrak{o}} \frac{\bar{\mathfrak{r}}}{\mathfrak{o}} \sim 1$ repräsentiert werden. Zu jedem rationalen Punkt $\mathfrak{p} = \mathfrak{p}_0$ von K/Ω gibt es dann eine unendliche Folge rationaler Punkte $\mathfrak{p}_i$ von K/Ω derart, daß

$$\mathfrak{p}_{i-1} \sim \left(\frac{\mathfrak{p}_i}{\mathfrak{o}}\right)^n \mathfrak{r}_{i-1} \qquad (i = 1, 2, \ldots) \tag{1}$$

mit $\mathfrak{r}_i$ aus R gilt. Dabei ist $\mathfrak{p}_i$ durch $\mathfrak{p}_{i-1}$ nur bis auf eine Translation um eine willkürliche n-Teilungsklasse festgelegt; wir arbeiten mit irgendeiner festen Wahl der $\mathfrak{p}_i$ zu $\mathfrak{p}$. Zusammengezogen hat man

$$\frac{\mathfrak{p}}{\mathfrak{o}} \sim \left(\frac{\mathfrak{p}_k}{\mathfrak{o}}\right)^{n^k} \left(\frac{\mathfrak{r}_{k-1}}{\mathfrak{o}}\right)^{n^{k-1}} \cdots \left(\frac{\mathfrak{r}_1}{\mathfrak{o}}\right)^n \frac{\mathfrak{r}_0}{\mathfrak{o}} \qquad (k = 1, 2, \ldots). \tag{2}$$

Entweder ist nun einmal $\left(\frac{\mathfrak{p}_k}{\mathfrak{o}}\right)^n \sim 1$. In diesem Falle gehört die Klasse von $\frac{\mathfrak{p}}{\mathfrak{o}}$ zu der aus $\frac{R}{\mathfrak{o}}$ erzeugten Gruppe. Oder aber es sind alle $\left(\frac{\mathfrak{p}_i}{\mathfrak{o}}\right)^n \not\sim 1$, so daß kein $\mathfrak{p}_{i-1}$ zu R gehört; wegen der besonderen Wahl von R sind dann alle $\mathfrak{p}_{i-1} \neq \mathfrak{o}$, $\mathfrak{r}_{i-1}$, $\bar{\mathfrak{r}}_{i-1}$. In diesem Falle zeigen wir, daß es ein (von $\mathfrak{p}$ abhängiges) $k_0(\mathfrak{p})$ derart gibt, daß $\mathfrak{p}_k$ mit $k \geqq k_0(\mathfrak{p})$ einem von $\mathfrak{p}$ unabhängigen endlichen Vorrat P angehört. In jedem Falle gehört demnach die Klasse von $\frac{\mathfrak{p}}{\mathfrak{o}}$ zu der aus $\frac{R}{\mathfrak{o}}$ und $\frac{P}{\mathfrak{o}}$ erzeugten Gruppe, d. h. die Gruppe D wird durch die endlich vielen Repräsentanten aus $\frac{R}{\mathfrak{o}}$ und $\frac{P}{\mathfrak{o}}$ erzeugt, hat also endlichen Rang.

3. Der Hauptschluß bei dieser descente infinie, nämlich der Nachweis der Endlichkeit des Vorrats P für $\mathfrak{p}_k$ im zweiten Falle, wird dadurch erbracht, daß für eine Beziehung vom Typus (1):

$$\mathfrak{p} \sim \left(\frac{\mathfrak{p}'}{\mathfrak{o}}\right)^n \mathfrak{r} \quad \text{mit} \quad \mathfrak{p} \neq \mathfrak{o}, \mathfrak{r}, \bar{\mathfrak{r}} \tag{3}$$

die homogenen Koordinaten von $\mathfrak{p}'$ ihrer Höhe nach durch die homogenen Koordinaten von $\mathfrak{p}$ abgeschätzt werden. Dieser Teil unseres Beweises unterscheidet sich von dem entsprechenden Teil bei Mordell und Weil durch eine der Sachlage besser angepaßte Wahl der Koordinaten. Wir bilden nämlich die Koordinaten nicht mittels der Weierstrassschen Normalform der Erzeugung von K/Ω, was im Sinne von A, § 3 der Klasse von $\mathfrak{o}^3$ entspricht, sondern mittels der Klasse N von $\mathfrak{o}^{n^2}$. Der Grad n^2 dieser Klasse N erfüllt die in A, § 3, **3** geforderte Ungleichung: $n^2 \geqq 2^2 = 4 - 3g + 1$. Eine für unseren Zweck geeignete homogene N-Basis erhalten wir aus der Theorie des n-Teilungskörpers. Eine solche muß aus $\dim N = n^2$ Elementen bestehen. Nach dem Beweis des Kummer-Zerlegungsgesetzes in § 2 sind nun die dortigen n^2 Elemente

$$w_J \simeq \frac{\mathfrak{i}^{n_0}}{\mathfrak{o}^{n_0}}$$

linear-unabhängig über Kn, also sicher über Ω. Diese Elemente bilden eine N-Basis. Denn nach der Definition von n_0 sind die $\mathfrak{i}$ die Lösungen von $n_0 \mathfrak{i} = \mathfrak{o}$. Daher ist $\mathfrak{o}^{n_0} = \prod_{\mathfrak{i}} \mathfrak{i}$. Weil nun die Gruppe D_n der J den Typus (n, n) hat, gilt $\prod_J J = 1$, also $\prod_{\mathfrak{i}} \mathfrak{i} \sim \mathfrak{o}^{n^2}$, und somit in der Tat $\mathfrak{o}^{n_0} \sim \mathfrak{o}^{n^2}$. Wegen dieser Äquivalenz gibt es in K ein Element

$$t \simeq \frac{\mathfrak{o}^{n_0}}{\mathfrak{o}^{n^2}}.$$

Wir legen dann für unseren Zweck vorteilhafter folgende Normierung der homogenen N-Basis w_J zugrunde:

$$x_J = t\, w_J \simeq \frac{\mathfrak{i}^{n_0}}{\mathfrak{o}^{n^2}}.$$

Bei ihr ist nämlich die N-Basis x_J primitiv für alle $\mathfrak{p} \neq \mathfrak{o}$. Ist also $\mathfrak{p} \neq \mathfrak{o}$, so gilt nach A, § 9, 8 für die Höhe der homogenen n-Koordinaten von $\mathfrak{p}$ die Formel:

$$H_x(\mathfrak{p}) \doteq |N(\mathfrak{o}(\mathfrak{p}))|^{n^2} \cdot N\left(\max_J |x_J(\mathfrak{p})|\right). \tag{4}$$

4. Mittels dieser Formel schätzen wir nunmehr bei Bestehen einer Beziehung (3) die Koordinaten von $\mathfrak{p}'$ durch die von $\mathfrak{p}$ ab. Wir schreiben dazu (3) in der Form:

$$\mathfrak{p} = \varrho \mathfrak{n}_0 \mathfrak{p}' \quad \text{mit} \quad \mathfrak{p} \neq \mathfrak{o}, \mathfrak{r}, \bar{\mathfrak{r}}, \tag{3'}$$

wo ϱ die Translation um die Klasse von $\frac{\mathfrak{r}}{\mathfrak{o}}$ bezeichnet, und zerlegen diese Beziehung in zwei Einzelschritte, die Multiplikation n_0 und die Translation ϱ.

a) *Koordinatenabschätzung bei der Multiplikation.* Die zu betrachtende Beziehung lautet:

(3a) $$\mathfrak{p} = n_0 \mathfrak{p}' \quad \text{mit} \quad \mathfrak{p} \neq \mathfrak{o}.$$

Wir drücken die Basis x_J von $\left\{\frac{1}{\mathfrak{o}^{n^2}}\right\}$ in K durch die meromorph zugeordnete Basis $x_J n_0$ von $\left\{\frac{1}{(\mathfrak{o} n_0)^{n^2}}\right\}$ in Kn aus. Es ist

$$w_J^n = z_J n_0 \cong \left(\frac{\mathfrak{i} n_0}{\mathfrak{o} n_0}\right)^n.$$

Hiernach besteht ein Gleichungssystem:

$$w_J^{n^2} = (z_J n_0)^n = \sum_{J'} \alpha_{J,J'} \cdot x_{J'} n_0$$

mit Koeffizienten $\alpha_{J,J'}$ aus Ω. Multiplikation mit t^{n^2} liefert das Gleichungssystem:

$$x_J^{n^2} = t^{n^2} \sum_{J'} \alpha_{J,J'} \cdot x_{J'} n_0,$$

das die N-Basis x_J durch die meromorph zugeordnete $N n_0$-Basis $x_J n_0$ ausdrückt. Dies Gleichungssystem ist auch an sich interessant, als eine algebraisch-durchsichtige homogene Erzeugung des n-Teilungskörpers K/Kn. Wir gehen zu den Resten mod. $\mathfrak{p}'$ über. Nach der Restformel § 1, (2) und nach (3a) ist

$$(x_J n_0)(\mathfrak{p}') = x_J(n_0 \mathfrak{p}') = x_J(\mathfrak{p}).$$

Damit ergibt sich das Gleichungssystem:

$$x_J(\mathfrak{p}')^{n^2} = t(\mathfrak{p}')^{n^2} \sum_{J'} \alpha_{J,J'} x_{J'}(\mathfrak{p}),$$

das die homogenen N-Koordinaten von $\mathfrak{p}'$ durch die von $\mathfrak{p}$ ausdrückt; man beachte dabei, daß wegen $\mathfrak{p} \neq \mathfrak{o}$ auch $\mathfrak{p}' \neq \mathfrak{o}$ ist, so daß die auftretenden Reste $\neq \infty$ sind. Aus diesem Gleichungssystem folgt eine Abschätzung:

(5a) $$N\left(\operatorname*{Max}_J |x_J(\mathfrak{p}')|\right)^{n^2} \leqq A \cdot |N(t(\mathfrak{p}'))|^{n^2} \cdot N\left(\operatorname*{Max}_J |x_J(\mathfrak{p})|\right)$$

mit einer durch die Koeffizienten $\alpha_{J,J'}$ bestimmten, also von $\mathfrak{p}$ unabhängigen positiven Zahl A. Aus $t \sim \frac{\mathfrak{o} n_0}{\mathfrak{o}^{n^2}}$ folgt nun nach dem Hauptsatz der Distributionslehre:

$$t(\mathfrak{p}') \doteq \frac{(\mathfrak{o} n_0)(\mathfrak{p}')}{\mathfrak{o}(\mathfrak{p}')^{n^2}}.$$

Darin ist nach der Restformel § 1, (3) und nach (3a)

$$(\mathfrak{o} n_0)(\mathfrak{p}') \doteq \mathfrak{o}(n_0 \mathfrak{p}') = \mathfrak{o}(\mathfrak{p}).$$

Demnach ist

$$t(\mathfrak{p}') \cdot \frac{\mathfrak{o}(\mathfrak{p})}{\mathfrak{o}(\mathfrak{p}')^{n^2}},$$

und somit (im Sinne von A, § 9, 8)

$$|N(t(\mathfrak{p}'))| \doteq \frac{|N(\mathfrak{o}(\mathfrak{p}))|}{|N(\mathfrak{o}(\mathfrak{p}'))|^{n^2}}. \tag{6a}$$

Aus (5a) und (6a) folgt nach (4) eine Abschätzung:

$$H_x(\mathfrak{p}') \leqq C \cdot H_x(\mathfrak{p})^{\frac{1}{n^2}} \tag{7a}$$

mit einer von $\mathfrak{p}$ unabhängigen positiven Zahl C.

b) *Koordinatenabschätzung bei der Translation.* Die zu betrachtende Beziehung lautet:

$$\mathfrak{p} = \varrho\mathfrak{p}' \quad \text{mit} \quad \mathfrak{p} \neq \mathfrak{o}, \mathfrak{r}, \bar{\mathfrak{r}}, \tag{3b}$$

wo ϱ die Translation um die Klasse von $\frac{\mathfrak{r}}{\mathfrak{o}}$ ist. Der Beziehung $\mathfrak{o}\varrho^{-1} = \varrho\mathfrak{o} = \mathfrak{r}$ entsprechend drücken wir hier die durch den Isomorphismus ϱ^{-1} entstehende Basis $x_J\varrho^{-1}$ von $\left\{\frac{1}{\mathfrak{r}^{n^2}}\right\}$ durch die Basis x_J von $\left\{\frac{1}{\mathfrak{o}^{n^2}}\right\}$ aus. Wegen $\frac{\mathfrak{r}}{\mathfrak{o}}\,\frac{\bar{\mathfrak{r}}}{\mathfrak{o}} \sim 1$ gibt es in K ein Element

$$u \sim \frac{\mathfrak{o}^2}{\mathfrak{r}\bar{\mathfrak{r}}}.$$

Es ist dann

$$\frac{1}{u^{n^2}}\left\{\frac{1}{\mathfrak{r}^{n^2}}\right\} \leqq \left\{\frac{1}{\mathfrak{o}^{2n^2}}\right\} = \left(\frac{1}{\mathfrak{o}^{n^2}}\right)^2,$$

letzteres nach dem Hilfssatz in A, § 2, **2**. Hiernach besteht ein Gleichungssystem:

$$x_J\varrho^{-1} = u^{n^2} \sum_{J', J''} \alpha_{J, J', J''}\, x_{J'}\, x_{J''}$$

mit Koeffizienten $\alpha_{J, J', J''}$ aus Ω, das die durch den Isomorphismus ϱ^{-1} entstehende $N\varrho^{-1}$-Basis $x_J\varrho^{-1}$ durch die N-Basis x_J ausdrückt. Wir gehen zu den Resten mod. $\mathfrak{p}$ über. Nach der Restformel § 1, (2) und nach (3b) ist

$$(x_J\varrho^{-1})(\mathfrak{p}) = x_J(\varrho^{-1}\mathfrak{p}) = x_J(\mathfrak{p}').$$

Damit ergibt sich das Gleichungssystem:

$$x_J(\mathfrak{p}') = u(\mathfrak{p})^{n^2} \sum_{J', J''} \alpha_{J, J', J''}\, x_{J'}(\mathfrak{p})\, x_{J''}(\mathfrak{p}),$$

das die homogenen N-Koordinaten von $\mathfrak{p}'$ durch die von $\mathfrak{p}$ ausdrückt; man beachte dabei, daß wegen $\mathfrak{p} \neq \mathfrak{o}, \mathfrak{r}, \bar{\mathfrak{r}}$ die auftretenden Reste $\neq \infty$ sind. Aus diesem Gleichungssystem folgt eine Abschätzung:

$$N\left(\operatorname*{Max}_J |x_J(\mathfrak{p}')|\right) \leqq A_{\mathfrak{r}} \cdot |N(u(\mathfrak{p}))|^{n^2} \cdot N\left(\operatorname*{Max}_J |x_J(\mathfrak{p})|\right)^2 \tag{5b}$$

mit einer durch die Koeffizienten $\alpha_{J,J',J''}$ bestimmten, also nur von $\mathfrak{r}$, nicht von $\mathfrak{p}$ abhängigen positiven Zahl $A_{\mathfrak{r}}$. Aus $u \cong \frac{\mathfrak{o}^2}{\mathfrak{r}\bar{\mathfrak{r}}}$ folgt nun nach dem Hauptsatz der Distributionslehre:

$$u(\mathfrak{p}) \doteq \frac{\mathfrak{o}(\mathfrak{p})^2}{\mathfrak{r}(\mathfrak{p})\,\bar{\mathfrak{r}}(\mathfrak{p})}.$$

Darin ist nach der Restformel § 1, (3) und nach (3b)

$$\mathfrak{r}(\mathfrak{p}) = \mathfrak{o}\varrho^{-1}(\mathfrak{p}) = \mathfrak{o}(\varrho^{-1}\mathfrak{p}) = \mathfrak{o}(\mathfrak{p}').$$

Demnach ist

$$u(\mathfrak{p}) \doteq \frac{1}{\bar{\mathfrak{r}}(\mathfrak{p})} \cdot \frac{\mathfrak{o}(\mathfrak{p})^2}{\mathfrak{o}(\mathfrak{p}')};$$

da $\bar{\mathfrak{r}}(\mathfrak{p})$ wesentlich ganz ist, also beschränkten Nenner hat (A, § 9, 7), folgt hieraus

$$|N(u(\mathfrak{p}))| \leqq B_{\mathfrak{r}} \frac{|N(\mathfrak{o}(\mathfrak{p}))|^2}{|N(\mathfrak{o}(\mathfrak{p}'))|} \tag{6b}$$

mit einer nur von $\mathfrak{r}$, nicht von $\mathfrak{p}$ abhängigen positiven Zahl $B_{\mathfrak{r}}$. Aus (5b) und (6b) folgt nach (4) eine Abschätzung:

$$H_x(\mathfrak{p}') \sim C_{\mathfrak{r}} \cdot H_x(\mathfrak{p})^2 \tag{7b}$$

mit einer nur von $\mathfrak{r}$, nicht von $\mathfrak{p}$ abhängigen positiven Zahl $C_{\mathfrak{r}}$.

Aus den für die speziellen Beziehungen (3a), (3b) gewonnenen Abschätzungen (7a), (7b) ergibt sich für die allgemeine Beziehung (3'), d. h. (3), durch Zusammensetzung:

$$H_x(\mathfrak{p}') \leqq C \cdot H_x(n_0\mathfrak{p}')^{\frac{1}{n^2}} \leqq C C_{\mathfrak{r}}^{\frac{1}{n^2}} \cdot H_x(\mathfrak{p})^{\frac{2}{n^2}}.$$

Bei der Beziehungskette (1) gilt demnach, weil die $\mathfrak{r}_i$ dem endlichen Repräsentantensystem R entnommen sein sollen, eine Abschätzung:

$$H_x(\mathfrak{p}_i) \leqq C_R \cdot H_x(\mathfrak{p}_{i-1})^{\frac{2}{n^2}}$$

mit einer nur von R, nicht von $\mathfrak{p}$ abhängigen positiven Zahl C_R. Daraus folgt für die Beziehung (2) durch Zusammensetzung:

$$H_x(\mathfrak{p}_k) \leqq C_R^{1+\frac{2}{n^2}+\cdots+\left(\frac{2}{n^2}\right)^{k-1}} \cdot H_x(\mathfrak{p})^{\left(\frac{2}{n^2}\right)^k},$$

also

$$H_x(\mathfrak{p}_k) < C_R^{\frac{n^2}{n^2-2}} \cdot H_x(\mathfrak{p})^{\left(\frac{2}{n^2}\right)^k}.$$

Wegen $n^2 \geqq 2^2 > 2$ gibt es hiernach ein $k_0(\mathfrak{p})$ derart, daß

$$H_x(\mathfrak{p}) \leqq C_R^{\frac{n^2}{n^2-2}} + 1 \text{ für alle } k \geqq k_0(\mathfrak{p}).$$

Für $k \geqq k_0(\mathfrak{p})$ ist demgemäß die Höhe der homogenen N-Koordinaten von $\mathfrak{p}_k$ unabhängig von $\mathfrak{p}$ beschränkt. Die $\mathfrak{p}_k$ in (2) gehören somit für $k \geqq k_0(\mathfrak{p})$ einem von $\mathfrak{p}$ unabhängigen endlichen Vorrat P an. Damit ist nach dem schon Gesagten der Endlichkeitssatz bewiesen.

(Eingegangen am 5. Oktober 1941.)

Über die definiten selbstadjungierten Eigenwertaufgaben bei gewöhnlichen linearen Differentialgleichungen. IV.

Herrn Konrad Knopp
zum 60. Geburtstag am 22. Juli 1942 gewidmet.

Von

E. Kamke in Tübingen.

§ 1.

Einleitung.

1.1. In dieser Arbeit, deren Beweisführungen von den vorangehenden Arbeiten[1]) unabhängig sind, handelt es sich wie in K II und K III um die Eigenwertaufgabe, die aus der Differentialgleichung

$$F(y) = \lambda G(y) \tag{1}$$

und den Randbedingungen

$$U_\mu(y) = 0 \qquad (\mu = 1, \ldots, 2m) \tag{2}$$

besteht. Dabei sind F und G die selbstadjungierten Differentialausdrücke

$$F(y) = \sum_{\nu=0}^{m} (f_\nu y^{(\nu)})^{(\nu)}, \quad G(y) = \sum_{\nu=0}^{n} (g_\nu y^{(\nu)})^{(\nu)}, \tag{3}$$

die $f_\nu = f_\nu(x)$ und $g_\nu = g_\nu(x)$ sind im Intervall $a \leqq x \leqq b$ gegebene reelle, ν-mal stetig differenzierbare Funktionen, ferner ist $f_m \neq 0$, $g_n \not\equiv 0$, $|f_0| + |g_0| \not\equiv 0$[2]), $0 \leqq n < m$. Die

$$U_\mu(y) = \sum_{\varkappa=0}^{2m-1} [\alpha_{\mu,\varkappa} y^{(\varkappa)}(a) + \beta_{\mu,\varkappa} y^{(\varkappa)}(b)] \tag{4}$$

sind gegebene Linearformen in den $y^{(\varkappa)}(a)$, $y^{(\varkappa)}(b)$ mit reellen Koeffizienten $\alpha_{\mu,\varkappa}$, $\beta_{\mu,\varkappa}$, deren Matrix den Rang $2m$ hat, d. h. die Gleichungen (2) sind voneinander linear unabhängig.

Die Gleichungen

$$F(y) = 0, \quad G(y) = 0$$

[1]) K I, K II, K III = Kamke, Math. Zeitschr. **45** (1939), S. 759–787; **46** (1940), S. 231–250 und 251–286.

[2]) Diese Voraussetzung wird allein in 4.4 benutzt und läßt sich in einer Reihe von Fällen auch umgehen. In dem Fall $n = 0$, d. h. für $G(y) = g(x)y$ ist sie sicher erfüllt, wenn $g \not\equiv 0$ vorausgesetzt wird.

sollen keine Lösung gemeinsam haben, die $\not\equiv 0$ ist und die Randbedingungen (2) erfüllt[3]).

Schließlich soll die Eigenwertaufgabe (1), (2) selbstadjungiert[4]) und in dem in 1. 3 angegebenen Sinne definit[5]) sein.

Diese Voraussetzungen sollen im folgenden immer erfüllt sein. Die Eigenwertaufgabe ist dann normal[6]). Daher sind nach K II, Satz 3 und 4, alle Eigenwerte reell, ferner gibt es höchstens abzählbar viele Eigenwerte, und diese haben keinen im Endlichen gelegenen Häufungspunkt, können also nach wachsender Größe numeriert werden.

Aus K III läßt sich weiter entnehmen, daß es unendlich viele Eigenwerte gibt. Doch wird das hier nicht als bekannt vorausgesetzt, sondern im folgenden mitbewiesen.

1. 2. In dem Fall, daß für jede $2m$-mal stetig differenzierbare Funktion $y(x)$, welche die Randbedingungen (2) erfüllt, neben der Definitheitsvoraussetzung von K III[7]) auch noch[8])

$$\int y\,G(y)\,dx \geqq 0$$

gilt[9]), liefert der Satz 2 von K III folgendes: Die Variationsaufgabe

$$\frac{\int y\,F(y)\,dx}{\int y\,G(y)\,dx} = \text{Min} \tag{5}$$

---

[3]) Diese Voraussetzung ist z. B. erfüllt, wenn die Gleichungen $F(y) = 0$ und $G(y) = 0$ überhaupt keine Lösung außer $y \equiv 0$ gemeinsam haben, und das trifft z. B. zu, wenn $n = 0$, also $G(y) = g(x)y$ und $g \not\equiv 0$ ist. Denn dann folgt aus $G(y) = 0$, daß $y \equiv 0$ in einem Teilintervall, also, wenn y zugleich die lineare Differentialgleichung $F(y) = 0$ erfüllt, $y \equiv 0$ sogar in dem ganzen Intervall $\langle a, b\rangle$ ist.

[4]) Vgl. S. 75 und K II, S. 231f.

[5]) Sie ist dann, wie S. 71, Fußnote 20 gezeigt wird, auch in dem früheren Sinne von K III, S. 252 definit.

[6]) Zu diesem Begriff vgl. K II, S. 237f. Daß die Eigenwertaufgabe unter den obigen Voraussetzungen normal ist, folgt aus K II, Satz 2 (d) in Verbindung mit der vorangehenden Fußnote.

[7]) In K III, S. 252 war die Eigenwertaufgabe definit genannt, wenn für jede Funktion $y(x)$, die in $\langle a, b\rangle$ $2m$-mal stetig differenzierbar ist und die $2m$ Randbedingungen (2) erfüllt,

$$\int_a^b y\,F(y)\,dx \geqq 0$$

und außerdem für diejenigen dieser Funktionen $y(x) \not\equiv 0$, für die hierin etwa das Gleichheitszeichen gilt,

$$\int_a^b y\,G(y)\,dx \neq 0$$

ist und ein festes Vorzeichen hat.

[8]) In dieser Arbeit ist durchweg $\int = \int_a^b$.

[9]) Dann sind offenbar alle Eigenwerte $\geqq 0$.

hat eine Lösung $y = \varphi(x)$, wenn zur Konkurrenz alle diejenigen Funktionen $y(x)$ zugelassen werden, für die der Nenner > 0 ist und die

(a) $2m$-mal stetig differenzierbar sind und

(b) die $2m$ Randbedingungen (2) erfüllen.

Der Minimalwert von (5) ist der kleinste Eigenwert λ_1 und $\varphi(x)$ eine zu diesem gehörige Eigenfunktion der Aufgabe (1), (2).

Diese Festlegung des kleinsten Eigenwertes, die auf die höheren Eigenwerte ausgedehnt werden kann, hat bekanntlich neben der theoretischen auch eine erhebliche praktische Bedeutung für die wirkliche Berechnung der Eigenwerte[10]), und zwar ist es für diese genäherte Berechnung der Eigenwerte durch die linke Seite von (5) um so günstiger, je weniger eingeengt der Bereich der zugelassenen Funktionen $y(x)$ ist.

1.3. Im Fall $m = 1$[11]) hat HOLMGREN[12]) für mehrere Typen von Randbedingungen nachgewiesen, daß die Bedingungen (a) und (b) nach geeigneter Umformung des Zählers von (5) gemildert werden können, d. h. der Bereich der zugelassenen Funktionen erweitert werden kann. Im folgenden soll gezeigt werden, daß das sogar für alle selbstadjungierten definiten Eigenwertaufgaben möglich ist[13]).

Zunächst ist nach der DIRICHLETschen Formel[14]) für jede $2m$-mal stetig differenzierbare Funktion $y(x)$

$$\int y F(y)\,dx = \int \sum_{\nu=0}^{m} (-1)^\nu f_\nu\, y^{(\nu)2}\,dx + [R(y,y)]_a^b$$

mit

$$R(y,y) = \sum_{\nu=1}^{m} \sum_{p+q=\nu-1} (-1)^p (f_\nu\, y^{(\nu)})^{(q)}\, y^{(p)}$$

und entsprechend

$$\int y G(y)\,dx = \int \sum_{\nu=0}^{n} (-1)^\nu g_\nu\, y^{(\nu)2}\,dx + [S(y,y)]_a^b$$

---

[10]) Vgl. dazu L. COLLATZ, Zeitschr. f. angewandte Mathematik und Mechanik **19** (1939), S. 224ff.

[11]) Dann ist $n = 0$, also $G(y)$ von der Gestalt $g(x)\,y$ mit $g(x) \not\equiv 0$.

[12]) E. HOLMGREN, Arkiv för Matematik, Astronomi och Fysik **1** (1903—04), S. 401—417. Die Differentialgleichung hat bei HOLMGREN die spezielle Gestalt $y'' = \lambda\, g(x)\, y$.

[13]) Es bleibt zu untersuchen, ob und inwieweit die Ergebnisse etwa in der Arbeit von E. HÖLDER, Entwicklungssätze aus der Theorie der zweiten Variation [Acta Mathematica **70** (1939), S. 193—242] enthalten sind oder aus ihr herauspräpariert werden können. Wie mir Herr E. HÖLDER mitteilt, bereitet er eine Veröffentlichung über diese Frage vor.

[14]) Vgl. E. KAMKE, Differentialgleichungen: Lösungsmethoden und Lösungen, S. 76f. Leipzig 1942.

mit

$$S(y, y) = \sum_{\nu=1}^{n} \sum_{p+q=\nu-1} (-1)^p (g, y^{(\nu)})^{(q)} y^{(p)}.$$

Trägt man dieses in (5) ein, so bestehen Zähler und Nenner aus Integralen, in denen von y nur Ableitungen der Ordnung $\leqq m$ und $\leqq n$ auftreten, und integralfreien „DIRICHLETschen Restteilen", die nur Ableitungen der Ordnung $\leqq 2m - 1$ und $\leqq 2n - 1$ enthalten. Diese Restteile werden mittels der Randbedingungen (2) weiter umgeformt.

Man bildet durch lineare Kombination der Randbedingungen (2) möglichst viele solcher Gleichungen, die nur Ableitungen der Ordnung $\leqq m - 1$ enthalten[15]). Diese Randbedingungen seien jetzt mit

$$U_1(y) = 0, \ldots, U_k(y) = 0 \tag{6}$$

bezeichnet[16]) und mögen die (für diese Untersuchung) *wesentlichen Randbedingungen* heißen[17]). Zu diesen werden noch $2m - k$ der früheren Randbedingungen hinzugenommen, so daß im ganzen wieder $2m$ linear unabhängige Gleichungen entstehen. Diese letzten Randbedingungen seien mit

$$U_{k+1}(y) = 0, \ldots, U_{2m}(y) = 0 \tag{7}$$

bezeichnet und mögen die *restlichen Randbedingungen*[18]) heißen.

Vermittels der k wesentlichen Randbedingungen können k der Ableitungen $y^{(\nu)}(a)$, $y^{(\nu)}(b)$ mit $\nu \leqq m - 1$ durch die übrigen dieser Ableitungen ausgedrückt werden (wobei auch Koeffizienten 0 vorkommen können); diese letzten $2m - k$ Ableitungen $y^{(\nu)}(a)$, $y^{(\nu)}(b)$ mit $\nu \leqq m - 1$ mögen *freie Ableitungen* heißen.

Werden nun mittels der restlichen Randbedingungen (7) in $[R(y, y)]_a^b$ und $[S(y, y)]_a^b$, soweit möglich, die Ableitungen der Ordnung $\geqq m$ entfernt und dann noch alle Ableitungen der Ordnung $\leqq m - 1$ durch die freien Ableitungen ausgedrückt, so zeigt sich, daß alle Ableitungen der Ordnung $\geqq m$ herausfallen (Beweis in 2.3 und 2.5). Die so umgeformten DIRICHLETschen Restteile $[R(y, y)]_a^b$ und $[S(y, y)]_a^b$, die künftig (vgl. 2.5) mit $F_0(y, y)$ und

---

[15]) D. h. mit Koeffizienten, die $\neq 0$ sind.

[16]) $k = 0$ bedeutet, daß keine wesentlichen Randbedingungen vorhanden sind.

[17]) Für Beispiele siehe § 3.

[18]) Schon früher sind in Einzelfällen die Randbedingungen unterteilt worden. So hat R. COURANT im Fall $m = 1$ bei einigen Beispielen von „natürlichen" Randbedingungen gesprochen; diese gehören zu den Randbedingungen, die oben als restliche Randbedingungen bezeichnet sind. In der technischen Literatur (vgl. C. B. BIEZENO-R. GRAMMEL, Technische Dynamik, S. 165, Berlin 1939) sind im Falle $m = 2$ bei einigen Typen von Eigenwertaufgaben „geometrische" und „dynamische" Randbedingungen unterschieden. Diese entsprechen den obigen wesentlichen und restlichen Randbedingungen.

$G_0(y, y)$ bezeichnet werden, mögen *reduzierte* DIRICHLETsche *Restteile* heißen. Sie sind quadratische Formen $F_0(y, y)$ und $G_0(y, y)$ der freien Ableitungen[19]).

Die Eigenwertaufgabe (1), (2) soll jetzt *definit* heißen, wenn

$$(8) \quad (-1)^\nu f_\nu(x) \geqq 0 \ (\nu = 0, \ldots, m) \text{ und } (-1)^\nu g_\nu(x) \geqq 0 \ (\nu = 0, \ldots, n)$$

ist und wenn außerdem die reduzierten Restteile

$$(9) \qquad F_0(y, y) \geqq 0, \quad G_0(y, y) \geqq 0$$

sind[20]).

Weiter soll eine Funktion $y(x) \not\equiv 0$ eine *zulässige Funktion* heißen, wenn sie

(a) in $\langle a, b \rangle$ $(m-1)$-mal stetig differenzierbar, stückweise sogar m-mal stetig differenzierbar ist und

(b) die wesentlichen Randbedingungen (6) erfüllt[21]).

---

[19]) Dabei kann auch $F_0 \equiv 0$ und $G_0 \equiv 0$ sein.

[20]) Ist die Eigenwertaufgabe in dem obigen Sinne definit, so ist sie es auch im Sinne von K III, S. 252 (vgl. Fußnote 7 auf S. 68). Denn für zulässige Funktionen $y(x)$ im Sinne von K III, d. h. für Funktionen $y(x)$, die $2m$-mal stetig differenzierbar sind und alle $2m$ Randbedingungen (2) erfüllen, ist nach der obigen Umformung der DIRICHLETschen Formel

$$\int y F(y)\, dx = \int \sum_{\nu=0}^{m} (-1)^\nu f_\nu y^{(\nu)^2}\, dx + F_0(y, y)$$

und

$$\int y G(y)\, dx = \int \sum_{\nu=0}^{n} (-1)^\nu g_\nu y^{(\nu)^2}\, dx + G_0(y, y),$$

also

$$(*) \qquad \int y F(y)\, dx \geqq 0 \quad \text{und} \quad \int y G(y)\, dx \geqq 0,$$

also die erste der früheren Definitheitsvoraussetzungen erfüllt. Besteht nun für eine dieser Funktionen $y(x)$ die Gleichung $\int y F(y)\, dx = 0$, so wähle man eine beliebige $2m$-mal stetig differenzierbare Funktion $u(x)$, die mit ihren $2m-1$ ersten Ableitungen in den Punkten a und b verschwindet, also alle Randbedingungen (2) erfüllt. Dann erfüllt für beliebiges $\varepsilon \neq 0$ auch $y + \varepsilon u$ diese Randbedingungen, und nach (*) ist

$$\begin{aligned} 0 &\leqq \int (y + \varepsilon u) F(y + \varepsilon u)\, dx \\ &= \int y F(y)\, dx + 2\varepsilon \int u F(y)\, dx + \varepsilon^2 \int u F(u)\, dx \\ &= 2\varepsilon \int u F(y)\, dx + \varepsilon^2 \int u F(u)\, dx. \end{aligned}$$

Hätte das erste Integral der letzten Zeile für ein u einen Wert $\neq 0$, so ergäbe sich aus der Ungleichung für alle ε mit hinreichend kleinen absoluten Beträgen und mit einem zu diesem Integral entgegengesetzten Vorzeichen ein Widerspruch. Daher ist $\int u F(y)\, dx = 0$ für alle vorher genannten $u(x)$. Daraus folgt, daß $y(x)$ der Differentialgleichung $F(y) = 0$ genügt.

Ist nun zugleich $\int y G(y)\, dx = 0$, so ergibt sich in der gleichen Weise, daß auch $G(y) = 0$ ist. Dann ist aber nach dem zweiten Absatz von 1.1 $y \equiv 0$. Gilt in der ersten Ungleichung von (*) das Gleichheitszeichen für $y \not\equiv 0$, so kann es also in der zweiten Ungleichung gestrichen werden, d. h. auch die restliche Bedingung für die Definitheit in dem früheren Sinne ist erfüllt.

[21]) Die obigen beiden Bedingungen (a) und (b) bedeuten offenbar eine wesentliche Milderung der entsprechenden Bedingungen von 1.2.

1.4. Unter diesen Voraussetzungen wird die Variationsaufgabe

$$\frac{\int \sum_{\nu=0}^{m} (-1)^\nu f_\nu y^{(\nu)^2}\, dx + F_0(y, y)}{\int \sum_{\nu=0}^{n} (-1)^\nu g_\nu y^{(\nu)^2}\, dx + G_0(y, y)} = \text{Min} \tag{10}$$

gebildet. Über diese wird in § 4 bewiesen:

Satz 1. *In dem Bereich der zulässigen Funktionen $y(x)$, für die der Nenner $\neq 0$ ist, gibt es mindestens eine zulässige Funktion $y = \psi(x)$, für die der Bruch* (10) *den kleinsten Wert annimmt. Dieser Minimalwert ist der kleinste Eigenwert λ_1. Jede zulässige Funktion $y(x)$, für die* (10) *den Minimalwert annimmt, ist sogar $2m$-mal stetig differenzierbar und eine zu λ_1 gehörige Eigenfunktion.*

Hieraus ergibt sich unmittelbar die

Folgerung. *Für jede zulässige Funktion $y(x)$ ist die linke Seite von* (10) *eine obere Schranke für den kleinsten Eigenwert.*

In § 3 werden die Eigenwertaufgaben zweiter Ordnung und die Sturmschen Eigenwertaufgaben vierter Ordnung mit $n = 0$ angegeben, bei denen die Voraussetzungen des obigen Satzes erfüllt sind. § 5 enthält einige Ergänzungen: die Ausdehnung des Satzes auf die höheren Eigenwerte, die independente Festlegung der Eigenwerte, Besselsche Ungleichung und Parsevalsche Formel bei einer neuen Definition der Fourier-Koeffizienten einer zulässigen Funktion, den Kryloffschen Abschätzungssatz für die Eigenwerte bei dem Ritzschen Verfahren.

§ 2.

Untersuchung des Restteils der Dirichletschen Formel.

In diesem Paragraphen wird nur die Selbstadjungiertheit, nicht die Definitheit der Eigenwertaufgabe benutzt.

2.1. Übergang zu einer Bilinearform. Im Intervall $\langle a, b \rangle$ sei $u(x)$ $2m$-mal stetig differenzierbar und $v(x)$ $(m-1)$-mal stetig differenzierbar und stückweis sogar m-mal stetig differenzierbar, dann besteht für den Differentialausdruck $F(y)$ die Dirichletsche Formel [22])

$$\int v F(u)\, dx = \int \sum_{\nu=0}^{m} (-1)^\nu f_\nu u^{(\nu)} v^{(\nu)}\, dx + [R(u, v)]_a^b \tag{11}$$

mit

$$R(u, v) = \sum_{\nu=1}^{m} \sum_{p+q=\nu-1} (-1)^p (f_\nu u^{(\nu)})^{(q)} v^{(p)}. \tag{12}$$

[22]) Vgl. E. Kamke, Differentialgleichungen: Lösungsmethoden und Lösungen, S. 76f. Leipzig 1942.

Ordnet man in R die Glieder um und führt man die Differentiationen aus, so erhält man

$$\begin{aligned} R(u,v) &= \sum_{p=0}^{m-1} (-1)^p v^{(p)} \sum_{\nu=p+1}^{m} (f_\nu u^{(\nu)})^{(\nu-p-1)} \\ &= \sum_{p=0}^{m-1} (-1)^p v^{(p)} \sum_{\nu=p+1}^{m} \sum_{r=0}^{\nu-p-1} \binom{\nu-p-1}{r} u^{(\nu+r)} f_\nu^{(\nu-p-r-1)} \\ &= \sum_{p=0}^{m-1} (-1)^p v^{(p)} \sum_{\nu=p+1}^{m} \sum_{q=\nu}^{2\nu-p-1} \binom{\nu-p-1}{q-\nu} u^{(q)} f_\nu^{(2\nu-p-q-1)} \\ &= \sum_{p=0}^{m-1} \sum_{q=p+1}^{2m-p-1} A_{p,q}(x)\, v^{(p)} u^{(q)} \end{aligned}$$

mit

$$A_{p,q}(x) = \sum_{\frac{p+q+1}{2} \leqq \nu \leqq \operatorname{Min}(q,m)} (-1)^p \binom{\nu-p-1}{q-\nu} f_\nu^{(2\nu-p-q-1)}.$$

Da $p \leqq m-1$ ist, ist für $p+q = 2m-1$

$$\operatorname{Min}(q, m) = \operatorname{Min}(2m-p-1, m) = m,$$

also

$$A_{p,q}(x) = (-1)^p f_m(x) \neq 0.$$

Die $A_{p,q}(x)$ erfüllen somit ein Dreieck (vgl. Fig. 1 für $m = 3$) und haben in den Punkten der stark ausgezogenen Dreiecksseite Werte $\neq 0$. Durch Hinzu-

Fig. 1.

Fig. 2.

nahme von Gliedern mit dem Wert 0 wird das Dreieck zu einem Trapez ergänzt (Fig. 2). Dann ist

$$R(u,v) = \sum_{p=0}^{m-1} \sum_{q=0}^{2m-p-1} A_{p,q}(x)\, v^{(p)} u^{(q)} \tag{13}$$

eine Bilinearform in den Ableitungen $v^{(p)}$, $u^{(q)}$ mit

$$\operatorname{Det} |A_{p,q}(x)| = \pm f_m^m \neq 0 \qquad (0 \leqq p \leqq m-1;\ m \leqq q \leqq 2m-1). \tag{14}$$

Entsprechend ist für dieselben Funktionen u, v

$$\int v\, G(u)\, dx = \int \sum_{\nu=0}^{n} (-1)^\nu g_\nu u^{(\nu)} v^{(\nu)}\, dx + [S(u,v)]_a^b \tag{15}$$

mit

$$S(u,v) = \sum_{\nu=1}^{n} \sum_{p+q=\nu-1} (-1)^p (g_\nu u^{(\nu)})^{(q)} v^{(p)} = \sum_{p=0}^{n-1} \sum_{q=0}^{2n-p-1} B_{p,q}(x)\, v^{(p)} u^{(q)}, \tag{16}$$

wobei jetzt jedoch über die der Determinante (14) entsprechende Determinante keine Aussage gemacht werden kann.

Später wird für eine beliebige Zahl λ noch die aus (11) und (15) folgende Formel

$$\int v[F(u) - \lambda G(u)]\,dx = \int \Big\{ \sum_{\nu=0}^{m} (-1)^\nu f_\nu u^{(\nu)} v^{(\nu)} - \lambda \sum_{\nu=0}^{n} (-1)^\nu g_\nu u^{(\nu)} v^{(\nu)} \Big\}\, dx + [T(u,v)]_a^b \tag{17}$$

mit

$$T(u,v) = R(u,v) - \lambda S(u,v)$$

benutzt werden. Die Koeffizienten von $S(u,v)$ liegen wegen $n < m$ ganz in dem Koeffizienten-Trapez von $R(u,v)$, jedoch liegt kein Koeffizient auf der schrägen Trapezlinie. Daher ist

$$\text{Det}\,|T(u,v)| = \text{Det}\,|R(u,v)| \neq 0 \quad (0 \leqq p \leqq m-1;\ m \leqq q \leqq 2m-1). \tag{18}$$

Werden nun die Größen

$$u(a),\ u'(a),\ \ldots,\ u^{(m-1)}(a),\quad u(b),\ \ldots,\ u^{(m-1)}(b)$$

in irgendeiner Reihenfolge mit $u_1, \ldots, u_{2m}$ bezeichnet, die entsprechenden $v^{(\nu)}(a)$, $v^{(\nu)}(b)$ mit $v_1, \ldots, v_{2m}$ und schließlich die Ableitungen $u^{(\nu)}(a)$, $u^{(\nu)}(b)$ für $m \leqq \nu \leqq 2m-1$ mit $u_{2m+1}, \ldots, u_{4m}$ und die entsprechenden Ableitungen von v, die später auftreten werden, mit $v_{2m+1}, \ldots, v_{4m}$, so lauten die Randbedingungen (2)

$$U_\mu(u) = 0 \qquad (\mu = 1, \ldots, M) \tag{19}$$

mit $M = 2m$ und

$$U_\mu(u) = \sum_{\nu=1}^{2M} \alpha_{\mu,\nu} u_\nu \qquad (\mu = 1, \ldots, M);$$

die Matrix der $\alpha_{\mu,\nu}$ hat den Rang M. Ferner ist der Restteil der Dirichletschen Formel (11), wenn noch weitere Glieder mit dem Wert 0 hinzugenommen werden,

$$[R(u,v)]_a^b = \sum_{p=1}^{M} \sum_{q=1}^{2M} a_{p,q} v_p u_q \tag{20}$$

eine Bilinearform in den u, v mit

$$\text{Det}\,|a_{p,q}| \neq 0 \quad (p = 1, \ldots, M;\ q = M+1, \ldots, 2M). \tag{21}$$

Entsprechend ist

$$[S(u,v)]_a^b = \sum_{p=1}^{M} \sum_{q=1}^{2M} b_{p,q} v_p u_q, \tag{22}$$

wobei jetzt über die Koeffizienten jedoch keine der Ungleichung (21) entsprechende Aussage gemacht werden kann, und schließlich ist der in (17) auftretende Restteil von der Gestalt

$$[T(u,v)]_a^b = \sum_{p=1}^{M} \sum_{q=1}^{2M} c_{p,q}\, v_p\, u_q \tag{23}$$

mit

$$\text{Det}\,|c_{p,q}| \neq 0 \quad (p = 1, \ldots, M;\ q = M+1, \ldots, 2M). \tag{24}$$

Die Voraussetzung, daß die Eigenwertaufgabe (1), (2) selbstadjungiert ist, besagt folgendes[23]): Für je zwei Zahlensysteme

$$u(a),\ u'(a),\ \ldots,\ u^{(2m-1)}(a),\quad u(b),\ \ldots,\ u^{(2m-1)}(b)$$

und

$$v(a),\ v'(a),\ \ldots,\ v^{(2m-1)}(a),\quad v(b),\ \ldots,\ v^{(2m-1)}(b),$$

die beide die Randbedingungen (2) erfüllen, ist

$$[R(u,v)]_a^b = [R(v,u)]_a^b \quad \text{und} \quad [S(u,v)]_a^b = [S(v,u)]_a^b, \tag{25}$$

wo R und S durch (12) und (16) gegeben sind. In den soeben eingeführten Bezeichnungen besagt das: Es ist

$$\sum_{p=1}^{M} \sum_{q=1}^{2M} a_{p,q}\, v_p\, u_q = \sum_{p=1}^{M} \sum_{q=1}^{2M} a_{p,q}\, u_p\, v_q \tag{26}$$

für je zwei Zahlensysteme u_p und v_p, die beide die Gleichungen (19) erfüllen. Ferner gilt (26) auch mit $b_{p,q}$ statt $a_{p,q}$ und daher auch mit $c_{p,q}$ statt $a_{p,q}$.

Die weiteren Überlegungen werden für eine beliebige Bilinearform

$$A(u,v) = \sum_{p=1}^{M} \sum_{q=1}^{2M} a_{p,q}\, v_p\, u_q \tag{27}$$

mit der Eigenschaft angestellt, daß (26) für alle Zahlensysteme u_p, v_p gelten soll, die beide die Gleichungen (19) erfüllen. Die Ergebnisse lassen sich unmittelbar auf die Dirichletschen Restteile übertragen.

2. 2. Umformung der Nebenbedingungen (19). Zunächst werden, entsprechend dem Vorgehen in 1. 3, durch lineare Kombination der Gleichungen (19) möglichst viele linear unabhängige Gleichungen gebildet, in denen nur $u_1, \ldots, u_M$ vorkommen, d. h. in denen alle übrigen u_r den Koeffizienten 0 haben. Ein solches Gleichungssystem sei

$$\overline{U}_1(u) = 0, \ \ldots, \ \overline{U}_k(u) = 0; \tag{28}$$

es ist dann $0 \leqq k \leqq M$ ($k = 0$ bedeutet, daß es keine derartigen Gleichungen gibt). Dazu werden noch $M - k$ der ursprünglichen Gleichungen (19) ge-

[23]) Vgl. K II, S. 231.

nommen, die zusammen mit den Gleichungen (28) ein System von linear unabhängigen Gleichungen bilden, und mit

$$\overline{U}_{k+1}(u) = 0, \ldots, \quad \overline{U}_M(u) = 0 \tag{29}$$

bezeichnet. Dann besagen die Gleichungen (19) dasselbe wie die Gleichungen (28) + (29). Die Gleichungen (28) entsprechen den wesentlichen Randbedingungen von 1. 3, die Gleichungen (29) den restlichen Randbedingungen und mögen hier wesentliche und restliche Nebenbedingungen heißen.

Die Gleichungen (28) sind von der Gestalt

$$\sum_{\nu=1}^{M} \beta_{\mu,\nu} u_\nu = 0 \qquad (\mu = 1, \ldots, k).$$

Wegen der linearen Unabhängigkeit gibt es k Variable u_ν, die unter Abänderung der bisherigen Numerierung jetzt mit $u_1, \ldots, u_k$ bezeichnet seien, so daß die Determinante ihrer Koeffizientenmatrix $\neq 0$ ist. Das System (28) kann dann nach $u_1, \ldots, u_k$ aufgelöst werden:

$$u_\mu = \sum_{\nu=k+1}^{M} \gamma_{\mu,\nu} u_\nu \qquad (\mu = 1, \ldots, k); \tag{30}$$

$u_{k+1}, \ldots, u_M$ mögen freie Variable heißen.

Die $M - k$ Gleichungen (29) haben nach Eintragen von (30) die Gestalt

$$\sum_{\nu=k+1}^{2M} \beta_{\mu,\nu} u_\nu = 0 \qquad (\mu = k+1, \ldots, M),$$

und aus ihnen lassen sich nach unserer Annahme keine weiteren Gleichungen gewinnen, die nur $u_1, \ldots, u_M$ enthalten. Da die Gleichungen außerdem linear unabhängig sind, haben in ihnen $M - k$ der Größen u_ν mit $\nu \geqq M + 1$ eine Koeffizientenmatrix, deren Determinante $\neq 0$ ist. Unter Abänderung der bisherigen Numerierung seien diese Größen mit $u_{M+k+1}, \ldots, u_{2M}$ bezeichnet, während die übrigen u_ν mit $\nu \geqq M + 1$ die Nummern $M + 1, \ldots, M + k$ erhalten. Die obigen Gleichungen können dann nach $u_{M+k+1}, \ldots, u_{2M}$ aufgelöst werden:

$$u_\mu = \sum_{\nu=k+1}^{M+k} \gamma_{\mu,\nu} u_\nu \qquad (\mu = M + k + 1, \ldots, 2M). \tag{31}$$

Die Gleichungen (30) + (31) besagen dasselbe wie die Gleichungen (28) + (29) und damit dasselbe wie die Gleichungen (19).

Die vorgenommene Umnumerierung der $u_1, \ldots, u_M$ hat für die Bilinearform $A(u, v)$ die Wirkung, daß in der Matrix $(a_{p,q})$ Zeilen vertauscht werden und ebenso die entsprechenden Spalten, also nur Spalten mit einer Nummer $q \leqq M$. Die Umnumerierung der $u_{M+1}, \ldots, u_{2M}$ hat die Wirkung, daß in der Matrix $(a_{p,q})$ Spalten mit Nummern $q \geqq M + 1$ vertauscht werden.

Man erhält also jedenfalls wieder eine Bilinearform (27) mit der Eigenschaft (26); ferner bleibt die Eigenschaft (21) erhalten, wenn sie für die ursprüngliche Bilinearform gilt.

2. 3. Gestalt der Bilinearform nach Eintragen der Nebenbedingungen. In den Gleichungen (30) und (31) können $u_{k+1}, \ldots, u_{k+M}$ willkürlich gewählt werden. Zunächst werden nur die Gleichungen (30) berücksichtigt, d. h. die aus (30) sich ergebenden Werte $u_1, \ldots, u_k$ und ebenso $v_1, \ldots, v_k$ aus den Gleichungen mit v statt u werden in (27) eingetragen. Weiter wird

$$u_\mu = U_\mu + \sum_{\mu=k+1}^{M+k} \gamma_{\mu,\nu} u_\nu \qquad (\mu = M+k+1, \ldots, 2M) \tag{32}$$

gesetzt[24]); entsprechende Gleichungen werden mit v statt u gebildet. Dann bedeutet

$$U_{M+k+1} = 0, \ \ldots, \ U_{2M} = 0, \tag{33}$$

daß auch die Gleichungen (31) erfüllt sind. Vorerst brauchen diese letzten Gleichungen jedoch nicht erfüllt zu sein.

Trägt man die k Nebenbedingungen (30) für u und v und außerdem (32) in (27) ein, so entsteht[25])

$$\begin{aligned}
\bar{A}(u,v) = &\sum_{p=1}^{k}\Big(\sum_{q=1}^{k} + \sum_{q=k+1}^{M+k} + \sum_{q=M+k+1}^{2M}\Big) + \sum_{p=k+1}^{M}\Big(\sum_{q=1}^{k} + \sum_{q=k+1}^{M+k} + \sum_{q=M+k+1}^{2M}\Big) \\
&= \sum_{p=1}^{k}\sum_{q=1}^{k} a_{p,q} \sum_{\mu=k+1}^{M}\sum_{\nu=k+1}^{M} \gamma_{q,\mu}\gamma_{p,\nu} u_\mu v_\nu \\
&+ \sum_{p=1}^{k}\sum_{q=k+1}^{M+k} a_{p,q} u_q \sum_{\nu=k+1}^{M} \gamma_{p,\nu} v_\nu \\
&+ \sum_{p=1}^{k}\sum_{q=M+k+1}^{2M} a_{p,q}\Big(U_q \sum_{\nu=k+1}^{M}\gamma_{p,\nu} v_\nu + \sum_{\mu=k+1}^{M+k}\sum_{\nu=k+1}^{M}\gamma_{p,\nu}\gamma_{q,\mu} u_\mu v_\nu\Big) \\
&+ \sum_{p=k+1}^{M}\sum_{q=1}^{k} a_{p,q} v_p \sum_{\mu=k+1}^{M}\gamma_{q,\mu} u_\mu + \sum_{p=k+1}^{M}\sum_{q=k+1}^{M+k} a_{p,q} v_p u_q \\
&+ \sum_{p=k+1}^{M}\sum_{q=M+k+1}^{2M} a_{p,q}\Big(v_p U_q + v_p \sum_{\mu=k+1}^{M+k}\gamma_{q,\mu} u_\mu\Big).
\end{aligned}$$

Erfüllen die u und v auch noch die restlichen Nebenbedingungen (29), d. h. die Gleichungen (31), so gilt (33). Der dann aus $\bar{A}(u, v)$ entstehende Ausdruck sei mit $A_0(u, v)$ bezeichnet.

Die Bedingung (26) besagt nun, daß

$$A_0(u, v) = A_0(v, u) \tag{34}$$

[24]) Die hier auftretenden Größen U_μ haben natürlich eine andere Bedeutung als die U_μ in (2).

[25]) Leere Summen bedeuten 0.

für beliebige Zahlen

$$u_{k+1}, \ldots, u_{M+k} \quad \text{und} \quad v_{k+1}, \ldots, v_{M+k}$$

gilt. $A_0(u, v)$, d. h. das obige $\overline{A}(u, v)$ mit $U_q = 0$, enthält aber offensichtlich kein v_ν mit $\nu > M$, d. h. $A_0(v, u)$, enthält kein u_ν mit $\nu > M$, also enthält nach (34) auch $A_0(u, v)$ kein solches u_ν, d. h. es ist

$$\sum_{\mu=M+1}^{M+k} \sum_{\nu=k+1}^{M} u_\mu v_\nu \Big(\sum_{p=1}^{k} a_{p,\mu} \gamma_{p,\nu} + \sum_{p=1}^{k} \sum_{q=M+k+1}^{2M} a_{p,q} \gamma_{p,\nu} \gamma_{q,\mu} + a_{\nu,\mu} + \sum_{q=M+k+1}^{2M} a_{\nu,q} \gamma_{q,\mu} \Big) = 0$$

für beliebige u_μ, v_ν, also

$$(35) \quad \sum_{p=1}^{k} \sum_{q=M+k+1}^{2M} a_{p,q} \gamma_{p,\nu} \gamma_{q,\mu} + \sum_{p=1}^{k} a_{p,\mu} \gamma_{p,\nu} + \sum_{q=M+k+1}^{2M} a_{\nu,q} \gamma_{q,\mu} + a_{\nu,\mu} = 0$$

für $M + 1 \leqq \mu \leqq M + k$, $k + 1 \leqq \nu \leqq M$.

In $\overline{A}(u, v)$ und $A_0(u, v)$ fallen somit alle Glieder fort, die ein u_q mit $M + 1 \leqq q \leqq M + k$ enthalten. Damit wird

$$(36) \quad A_0(u,v) = \sum_{\mu=k+1}^{M} \sum_{\nu=k+1}^{M} u_\mu v_\nu \Big\{ \sum_{p=1}^{k} \gamma_{p,\nu} \Big(\sum_{q=1}^{k} a_{p,q} \gamma_{q,\mu} + \sum_{q=M+k+1}^{2M} a_{p,q} \gamma_{q,\mu} \Big) + \sum_{p=1}^{k} a_{p,\mu} \gamma_{p,\nu} + \sum_{q=1}^{k} a_{\nu,q} \gamma_{q,\mu} + \sum_{q=M+k+1}^{2M} a_{\nu,q} \gamma_{q,\mu} + a_{\nu,\mu} \Big\}$$

eine Bilinearform von $2(M - k)$ unabhängigen Veränderlichen und

$$(37) \quad \overline{A}(u, v) = A_0(u, v) + \sum_{\nu=k+1}^{M} v_\nu \sum_{q=M+k+1}^{2M} U_q \Big(\sum_{p=1}^{k} a_{p,q} \gamma_{p,\nu} + a_{\nu,q} \Big).$$

Da bei dieser Umformung von der Ungleichung (21) kein Gebrauch gemacht ist, gilt eine entsprechende Umformung auch für die Bilinearform (22).

2. 4. Bilinearformen mit der Eigenschaft (21). Gilt für die Bilinearform auch noch die Ungleichung (21) und ist

$$(38) \quad \overline{A}(u, v) - A_0(u, v) = 0$$

für beliebige Werte der freien Variabeln $v_{k+1}, \ldots, v_M$, so bestehen die Gleichungen (33), d. h. die u_ν erfüllen die Gleichungen (31).

Wird nämlich zur Abkürzung

$$(39) \quad A_{\nu,\mu} = \sum_{p=1}^{k} a_{p,\mu} \gamma_{p,\nu} + a_{\nu,\mu}$$

gesetzt, so folgt aus (38) und (37)

$$(40) \quad \sum_{q=M+k+1}^{2M} A_{\nu,q} U_q = 0 \qquad (\nu = k+1, \ldots, M).$$

Ferner wird aus (35)

$$(41)\quad \sum_{q=M+k+1}^{2M} A_{\nu,q}\gamma_{q,\mu} + A_{\nu,\mu} = 0 \quad (M+1 \leqq \mu \leqq M+k,\ k+1 \leqq \nu \geqq M).$$

Wenn aus (40) nicht die Gleichungen (33) gefolgert werden können, so ist

$$\mathrm{Det}\,|A_{\nu,q}| = 0 \quad (\nu = k+1, \ldots, M;\ q = M+k+1, \ldots, 2M).$$

Dann gibt es Zahlen $h_{k+1}, \ldots, h_M$, die nicht alle 0 sind und für die

$$\sum_{\nu=k+1}^{M} h_\nu A_{\nu,q} = 0 \quad (q = M+k+1, \ldots, 2M)$$

ist. Nach (41) ist dann auch für $\mu = M+1, \ldots, M+k$

$$\sum_{\nu=k+1}^{M} h_\nu A_{\nu,\mu} = -\sum_{q=M+k+1}^{2M} \gamma_{q,\mu} \sum_{\nu=k+1}^{M} h_\nu A_{\nu,q} = 0,$$

d. h. es ist im Ganzen

$$\sum_{\nu=k+1}^{M} h_\nu A_{\nu,\mu} = 0 \qquad \text{für } \mu = M+1, \ldots, 2M.$$

Diese Gleichungen besagen nach (39) für $\mu = M+1, \ldots, 2M$

$$0 = \sum_{\nu=k+1}^{M} h_\nu \left(\sum_{p=1}^{k} a_{p,\mu}\gamma_{p,\nu} + a_{\nu,\mu} \right)$$

$$= \sum_{p=1}^{k} a_{p,\mu} \sum_{\nu=k+1}^{M} h_\nu \gamma_{p,\nu} + \sum_{\nu=k+1}^{M} h_\nu a_{\nu,\mu},$$

d. h. das Gleichungssystem

$$\sum_{p=1}^{M} a_{p,\mu} x_p = 0 \qquad (\mu = M+1, \ldots, 2M)$$

hat, da nicht alle h_ν Null sind, eine eigentliche Lösung, also müßte

$$\mathrm{Det}\,|a_{p,\mu}| = 0 \quad (p = 1, \ldots, M;\ \mu = M+1, \ldots, 2M)$$

sein, im Widerspruch zu (21). Daher folgt aus (40) und somit aus (38) tatsächlich (33).

2. 5. Folgerungen für die Dirichletschen Restteile. Ich kehre nun zum Ausgangspunkt dieses Paragraphen zurück. Aus dem Vorangehenden (vgl. insbes. 2. 3) ergibt sich, daß $[R(u,v)]_a^b$ für $(2m-1)$-mal stetig differenzierbare Funktionen u, welche alle Randbedingungen (2) erfüllen, und $(m-1)$-mal stetig differenzierbare Funktionen v, welche die wesentlichen Randbedingungen (6) erfüllen, nach Eintragen dieser Randbedingungen eine Bilinearform $F_0(u,v)$ von gewissen $2m-k$ der Größen $u^{(\nu)}(a)$, $u^{(\nu)}(b)$ und den entsprechenden Größen $v^{(\nu)}(a)$, $v^{(\nu)}(b)$ mit $\nu \leqq m-1$, den freien Ableitungen (vgl. 1. 3) wird. Diese Bilinearform, das vorherige $A_0(u,v)$ der Formel (37), wird im folgenden als selbstständige Bilinearform, ohne Rücksicht auf ihre Entstehung und die dabei über die u, v gemachten Voraus-

setzungen auftreten, und ist der *reduzierte* DIRICHLETsche *Restteil*. Er kann für alle zulässigen Funktionen u, v gebildet werden und ist nach (25) bzw. (34) eine symmetrische Funktion

$$F_0(u, v) = F_0(v, u). \tag{42}$$

Führt man dieselbe Umformung von $[S(u, v)]_a^b$ mit den gleichen freien Ableitungen durch, so kommt man auf eine Bilinearform $G_0(u, v)$ derselben freien Ableitungen, für die ebenfalls

$$G_0(u, v) = G_0(v, u) \tag{43}$$

gilt, und schließlich führt $[T(u, v)]_a^b$ auf

$$F_0(u, v) - \lambda G_0(u, v).$$

Eine weitere Folgerung war in 2. 3 für Bilinearformen A gezogen, für welche die Ungleichung (21) gilt. Die Bilinearform $C(u, v)$ erfüllt nach (24) die entsprechende Ungleichung. Daher gilt das Ergebnis auch für C und kann so formuliert werden:

Sind u, v zulässige Funktionen und ist u in den Randpunkten a, b sogar $(2m-1)$-mal differenzierbar, so werden aus $[R(u, v)]_a^b$ und $[S(u, v)]_a^b$ nach Eintragen der wesentlichen Randbedingungen (6) Bilinearformen

$$\overline{F}(u, v) \quad \text{und} \quad \overline{G}(u, v)$$

der freien Ableitungen $u^{(\nu)}(a)$, $u^{(\nu)}(b)$ und $v^{(\nu)}(a)$, $v^{(\nu)}(b)$ sowie der höheren Ableitungen von u mit folgender Eigenschaft: ist für ein λ

$$\overline{F}(u, v) - \lambda \overline{G}(u, v) - [F_0(u, v) - \lambda G_0(u, v)] = 0$$

für alle freien Ableitungen $v^{(\nu)}(a)$, $v^{(\nu)}(b)$, so erfüllt u auch die restlichen Randbedingungen (7) und somit alle Randbedingungen (2).

§ 3.

Beispiele.

3. 1. Eigenwertaufgaben zweiter Ordnung. Für diese ist $m = 1$, also $n = 0$. Die Differentialgleichung (1) hat dann die Gestalt

$$(fy')' + hy + \lambda gy = 0,$$

wo $f = f(x)$ in $\langle a, b\rangle$ stetig differenzierbar, $h = h(x)$ und $g = g(x)$ stetig, $f \neq 0$ und $g \not\equiv 0$ ist. Die Randbedingungen sind [26])

$$\alpha_1 y_a + \alpha_1' y_a' + \beta_1 y_b + \beta_1' y_b' = 0,$$
$$\alpha_2 y_a + \alpha_2' y_a' + \beta_2 y_b + \beta_2' y_b' = 0.$$

[26]) Der Index a oder b bedeutet, daß $x = a$ oder $x = b$ einzutragen ist; also z. B. $y_a' = y'(a)$, $(f y'')_a' = f(a)\, y'''(a) + f'(a)\, y''(a)$.

Die Matrix der Koeffizienten hat den Rang 2. Daß die Eigenwertaufgabe selbstadjungiert ist, ergibt die Bedingung

$$(\alpha_1\alpha_2' - \alpha_1'\alpha_2)\, f_b = (\beta_1\beta_2' - \beta_1'\beta_2) f_a .$$

Wird die Differentialgleichung in der Gestalt

$$-(fy')' - hy = \lambda g y$$

geschrieben, so lautet die Variationsaufgabe (10)

$$\frac{\int (f y'^2 - h y^2)\, dx + F_0(y, y)}{\int g y^2\, dx} = \text{Min},$$

wobei $F_0(y, y)$ aus dem DIRICHLETschen Restteil

$$[R(y, y)]_a^b = [-fyy']_a^b = f_a y_a y_a' - f_b y_b y_b'$$

durch Reduktion mittels der Randbedingungen zu bilden ist. Dabei ist vorauszusetzen, daß die Aufgabe definit ist. Nach (8) ist dafür

$$f > 0, \quad h \leqq 0, \quad g \geqq 0$$

vorauszusetzen. Es bleibt noch zu untersuchen, wann (9) erfüllt ist, d. h. wann $F_0(y, y) \geqq 0$ gilt. Hierfür sind folgende Fälle zu unterscheiden, wobei die Randbedingungen schon in die Gestalt von wesentlichen und restlichen Randbedingungen gebracht sind:

(a) $y_a = 0,\ y_b = 0;$ $\qquad F_0 = 0.$

(b) $y_a = 0,\ y_b' = -\beta y_b;$ $\qquad F_0 = \beta f_b y_b^2.$

(c) $y_b = 0,\ y_a' = \alpha y_a;$ $\qquad F_0 = \alpha f_a y_a^2.$

(d) $y_a = y_b,\ f_a y_a' = f_b y_b';$ $\qquad F_0 = 0.$

(e) $y_a' = \alpha y_a + \gamma f_b y_b,$ $\qquad y_b' = -\gamma f_a y_a - \beta y_b;$

$$F_0 = \alpha f_a y_a^2 + \beta f_b y_b^2 + 2\gamma f_a f_b y_a y_b .$$

Im Fall (a) sind beide Randbedingungen wesentlich, in den Fällen (b), (c), (d) ist die erste Randbedingung die wesentliche, die zweite die restliche, im Fall (e) gibt es keine wesentlichen Randbedingungen. Wie die für F_0 angegebenen Ausdrücke zeigen, ist die Aufgabe nur definit, wenn $\alpha \geqq 0,\ \beta \geqq 0$ und im Fall (e) außerdem $f_a f_b \gamma^2 < \alpha\beta$ ist. Die ersten vier Fälle finden sich bei HOLMGREN, während der fünfte Fall anscheinend in der Literatur nicht enthalten ist[27]).

[27]) Nach einer mündlichen Mitteilung von Herrn HAMEL hat dieser jedoch in seinen Vorlesungen auf den Fall (e) hingewiesen.

3. 2. Eigenwertaufgaben vierter Ordnung mit Sturmschen Randbedingungen. Die Eigenwertaufgabe sei

$$(fy'')'' + (gy')' + hy = \lambda g_0 y$$

mit den Randbedingungen

$$\alpha_\nu y_a + \beta_\nu y_a' + \gamma_\nu f_a y_a'' + \delta_\nu [(fy'')_a' + g_a y_a'] = 0 \qquad (\nu = 1, 2),$$
$$\alpha_\nu y_b + \beta_\nu y_b' + \gamma_\nu f_b y_b'' + \delta_\nu [(fy'')_b' + g_b y_b'] = 0 \qquad (\nu = 3, 4).$$

Dabei ist $f = f(x)$ in $\langle a, b\rangle$ zweimal stetig differenzierbar, $g = g(x)$ einmal stetig differenzierbar, $h = h(x)$ und $g_0 = g_0(x)$ stetig, ferner $f \neq 0$, $g_0 \not\equiv 0$. Die Aufgabe ist genau dann selbstadjungiert, wenn

$$\begin{vmatrix} \alpha_1 & \delta_1 \\ \alpha_2 & \delta_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \beta_1 & \gamma_1 \\ \beta_2 & \gamma_2 \end{vmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{vmatrix} \alpha_3 & \delta_3 \\ \alpha_4 & \delta_4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \beta_3 & \gamma_3 \\ \beta_4 & \gamma_4 \end{vmatrix}$$

ist. Die Variationsaufgabe (10) lautet

$$\frac{\int (fy''^2 - gy'^2 + hy^2)\, dx + F_0(y, y)}{\int g_0 y^2\, dx} = \text{Min},$$

wobei F_0 aus dem Dirichletschen Restteil

$$[R(y, y)]_a^b = R_b - R_a$$

mit

$$R(y, y) = [(fy'')' + gy']\, y - fy'\, y''$$

zu bilden ist. Dabei ist vorauszusetzen, daß die Aufgabe definit ist. Nach (8) ist dafür

$$f > 0, \quad g \leqq 0, \quad h \geqq 0, \quad g_0 \geqq 0$$

vorauszusetzen. Weiter ist noch zu untersuchen, wann (9), d. h. $F_0(y, y) \geqq 0$ gilt. Hierfür genügt es, R_a mittels der auf den Randpunkt a bezüglichen Randbedingungen zu reduzieren, da man dann offenbar auch R_b und somit F_0 sofort hinschreiben kann. Dabei werden folgende Fälle unterschieden, wobei wiederum die Randbedingungen in die Gestalt von wesentlichen und restlichen Randbedingungen gebracht sind.

(a) $y_a = 0,\ y_a' = 0;$ $\qquad F_{0,a} = 0.$

(b) $y_a = 0,\ y_a'' = \alpha y_a';$ $\qquad F_{0,a} = -\alpha f_a y_a'^2.$

(c) $y_a' = \alpha y_a,\ (fy'')_a' = \beta y_a + \alpha f_a y_a'';$ $\qquad F_{0,a} = (\beta + \alpha g_a) y_a^2.$

(d) $f_a y_a'' = \alpha y_a + \beta y_a',\ (fy'')_a' = \gamma y_a - (\alpha + g_a) y_a';$
$$F_{0,a} = \gamma y_a^2 - 2\alpha y_a y_a' - \beta y_a'^2.$$

Bei (a) sind beide Randbedingungen wesentlich, bei (b) und (c) die ersten, bei (d) gibt es keine wesentlichen Randbedingungen. Bei (b) und (c) ist $-F_{0,a} \geqq 0$, wenn $\alpha \geqq 0$ bzw. $\beta + \alpha g_a \leqq 0$ ist; bei (d) ist $\beta \geqq 0$, $\gamma \leqq 0$ und $\alpha^2 \leqq |\beta\gamma|$ erforderlich.

§ 4.

Beweis des Hauptsatzes.

4. 1. Abkürzungen und Hilfsformeln. Für zulässige Funktionen $u(x)$, $v(x)$ der Eigenwertaufgabe (1), (2) und die reduzierten Restteile F_0, G_0 (vgl. 2. 5) der DIRICHLETschen Formel wird zur Abkürzung

$$(44)\qquad \begin{cases} \Phi(u,v) = \int \sum_{\nu=0}^{m} (-1)^\nu f_\nu u^{(\nu)} v^{(\nu)}\, dx + F_0(u,v), \\ \Psi(u,v) = \int \sum_{\nu=0}^{n} (-1)^\nu g_\nu u^{(\nu)} v^{(\nu)}\, dx + G_0(u,v), \\ \Phi(u) = \Phi(u,u), \qquad \Psi(u) = \Psi(u,u) \end{cases}$$

gesetzt. Wegen der Symmetrie von F_0, G_0 (vgl. 2. 5) ist dann

$$(45)\qquad \Phi(u,v) = \Phi(v,u), \quad \Psi(u,v) = \Psi(v,u),$$

ferner wegen der Bilinearität für beliebige Zahlen r, s

$$(46)\qquad \begin{cases} \Phi(ru+sv) = r^2\Phi(u) + 2rs\Phi(u,v) + s^2\Phi(v), \\ \Psi(ru+sv) = r^2\Psi(u) + 2rs\Psi(u,v) + s^2\Psi(v). \end{cases}$$

Da hierin wegen der Definitheit (vgl. 1. 3) die linken Seiten $\geqq 0$ sind, folgt

$$(47)\qquad |\Phi(u,v)|^2 \leqq \Phi(u)\Phi(v), \quad |\Psi(u,v)|^2 \leqq \Psi(u)\Psi(v).$$

4. 2. Beginn des Beweises. Für den Bereich der zulässigen Funktionen $u(x)$, für die $\Psi(u) \neq 0$ ist[28]), sei

$$(48)\qquad \lambda_1 = \operatorname*{fin}_u \frac{\Phi(u)}{\Psi(u)}.$$

Da Zähler und Nenner $\geqq 0$ sind, ist $\lambda_1 \geq 0$. Es soll gezeigt werden:

(a) der rechts stehende Bruch hat in dem Bereich der zulässigen Funktionen sogar ein Minimum, d. h. es gibt eine zulässige Funktion $u(x)$, für die

$$(49)\qquad \Phi(u) = \lambda_1 \Psi(u)$$

ist;

(b) jede Funktion dieser Art ist sogar $2m$-mal stetig differenzierbar und erfüllt die Differentialgleichung (1) sowie die restlichen Randbedingungen (7), also alle Randbedingungen (2) und ist somit, da zulässige Funktionen $\not\equiv 0$ sind, eine zu λ_1 gehörige Eigenfunktion der Eigenwertaufgabe (1), (2); λ_1 ist der kleinste Eigenwert.

Damit ist dann der Satz 1 von 1. 4 bewiesen.

---

[28]) Es gibt solche Funktionen $u(x)$. Denn es ist $g_n \not\equiv 0$. Wählt man eine m-mal stetig differenzierbare Funktion $u(x)$, die mit ihren ersten $m-1$ Ableitungen in den Punkten a und b verschwindet, deren n-te Ableitung aber $\neq 0$ ist in einem Intervall, in dem $g_n \neq 0$ ist, so ist dies eine zulässige Funktion, und nach (8) und (9) ist $\Psi(u) > 0$.

Jedenfalls gibt es eine Folge zulässiger Funktionen $u_1(x), u_2(x), \ldots$, für die $\Psi(u_h) \neq 0$ und

$$\lim_{h\to\infty} \frac{\Phi(u_h)}{\Psi(u_h)} = \lambda_1$$

ist[29]). Indem man jedes u_h mit einem passenden Zahlenfaktor multipliziert, kann man erreichen, daß

$$\Psi(u_h) = 1 \qquad (h = 1, 2, \ldots), \tag{50}$$

also

$$\lim_{h\to\infty} \Phi(u_h) = \lambda_1 \tag{51}$$

ist. Diese Folge zulässiger Funktionen bleibt zunächst fest. Dann gelten folgende Hilfssätze:

4.3. Es sei $v_1(x), v_2(x), \ldots$ eine Folge zulässiger Funktionen, für die

$$\Phi(v_h), \quad \Psi(v_h) \text{ beschränkt} \tag{52}$$

und

$$\Psi(u_h, v_h) = 0 \tag{53}$$

ist. Dann ist

$$\Phi(u_h, v_h) \to 0 \quad \text{für} \quad h \to \infty. \tag{54}$$

Beweis. Für beliebige Zahlen r_h, s_h sind auch $w_h = r_h u_h - s_h v_h$ zulässige Funktionen. Nach (46) ist

$$\Phi(w_h) = r_h^2 \Phi(u_h) + 2 r_h s_h \Phi(u_h, v_h) + s_h^2 \Phi(v_h),$$
$$\Psi(w_h) = r_h^2 \Psi(u_h) + 2 r_h s_h \Psi(u_h, v_h) + s_h^2 \Psi(v_h).$$

Nach (50) und (53) ist also

$$\Psi(w_h) = r_h^2 + s_h^2 \Psi(v_h) = 1,$$

wenn

$$r_h^2 = 1 - s_h^2 \Psi(v_h) \tag{55}$$

ist. Man wähle $s_h > 0$ so, daß die rechte Seite dieser Gleichung > 0 und $s_h \to 0$ ist. Wegen (52) ist dann $|r_h| \to 1$; über das noch freie Vorzeichen von r_h wird weiter unten verfügt werden. Nach (48) ist nun

$$\lambda_1 \leqq \frac{\Phi(w_h)}{\Psi(w_h)} = \Phi(w_h)$$
$$= r_h^2 \Phi(u_h) + 2 r_h s_h \Phi(u_h, v_h) + s_h^2 \Phi(v_h),$$

also nach (55)

$$\lambda_1 \leqq \Phi(u_h) + 2 r_h s_h \Phi(u_h, v_h) + s_h^2 [\Phi(v_h) - \Psi(v_h)].$$

[29]) Die u_h dürfen, was später benutzt wird, auch alle übereinstimmen.

Nach (48) und (50) ist $\Phi(u_h) \geqq \lambda_1$, also, da $s_h > 0$ ist,

$$2\, r_h \Phi(u_h, v_h) + s_h [\Phi(v_h) - \Psi(v_h)] \geqq 0$$

und somit wegen $s_h \to 0$ und (52)

$$\lim_{h \to \infty} r_h \Phi(u_h, v_h) \geqq 0.$$

Wird das noch freie Vorzeichen von r_h entgegengesetzt zu dem von $\Phi(u_h, v_h)$ gewählt, so folgt hieraus wegen $|r_h| \to 1$ die Relation (54).

4.4. Jede der Folgen

$$u_1^{(\nu)},\ u_2^{(\nu)},\ \ldots \qquad (\nu = 0,\ 1,\ \ldots,\ m-1)$$

ist in $a \leqq x \leqq b$ gleichmäßig beschränkt.

Beweis. Zunächst wird bewiesen:

(a) Zu jedem $0 \leqq \nu \leqq m-1$ und jedem h gibt es im Intervall $\langle a, b\rangle$ einen Punkt $\xi_{h,\nu}$, so daß die Folge

$$u_h^{(\nu)}(\xi_{h,\nu}) \qquad (h = 1, 2, \ldots)$$

beschränkt ist.

Angenommen, diese Behauptung sei falsch. Dann ist für ein $0 \leqq \nu \leqq m-1$

$$\overline{\lim_{h \to \infty}} \operatorname*{Min}_{a \leqq x \leqq b} |u_h^{(\nu)}(x)| = \infty, \tag{56}$$

und es gibt ein kleinstes ν dieser Art. Ist dieses $\geqq 1$, so ist

$$|u_h^{(\nu-1)}(\xi_{h,\nu-1})| \text{ beschränkt, etwa } \leqq A_{\nu-1} \tag{57}$$

für eine geeignet gewählte Folge von Punkten

$$\xi_{h,\nu-1} \qquad (h = 1, 2, \ldots)$$

des Intervalls $\langle a, b\rangle$. Weiter werden nur diejenigen h betrachtet, für die

$$\operatorname*{Min}_{a \leqq x \leqq b} |u_h^{(\nu)}| > 0$$

ist. Nach (56) gibt es unendlich viele solcher h, und für sie hat jedes $u_h^{(\nu)}(x)$ als stetige Funktion ein festes Vorzeichen. Daher ist für diese h

$$|u_h^{(\nu-1)}(x) - u_h^{(\nu-1)}(\xi_{h,\nu-1})| = \left| \int_{\xi_{h,\nu-1}}^{x} |u_h^{(\nu)}(x)|\, dx \right|,$$

also wegen (57)

$$|u_h^{(\nu-1)}(x)| \geqq \left| \int_{\xi_{h,\nu-1}}^{x} |u_h^{(\nu)}(x)|\, dx \right| - A_{\nu-1}.$$

Es sei nun $\langle x_1, x_2\rangle$ ein festes Teilintervall von $\langle a, b\rangle$. Dann gibt es in $\langle x_1, x_2\rangle$ für jedes h ein Teilintervall $\mathfrak{i}_{h,\nu-1}$ der Länge $\frac{x_2 - x_1}{4}$, so daß zwischen dem

Intervall $\mathfrak{i}_{h,\,\nu-1}$ und dem Punkt $\xi_{h,\,\nu-1}$ ein Teilintervall $\mathfrak{i}^*_{h,\,\nu-1}$ der Länge $\frac{x_2-x_1}{4}$ liegt. Für diese Intervalle folgt aus der obigen Ungleichung

$$\operatorname*{Min}_{x \text{ in } \mathfrak{i}_{h,\,\nu-1}} |u_h^{(\nu-1)}(x)| \geqq \int\limits_{\mathfrak{i}^*_{h,\,\nu-1}} |u_h^{(\nu)}(x)|\,dx - A_{\nu-1}$$
$$\geqq \frac{x_2-x_1}{4} \operatorname*{Min}_{a \leqq x \leqq b} |u_h^{(\nu)}(x)| - A_{\nu-1},$$

also nach (56)

$$\overline{\lim_{h\to\infty}} \operatorname*{Min}_{x \text{ in } \mathfrak{i}_{h,\,\nu-1}} |u_h^{(\nu-1)}(x)| = \infty. \tag{58}$$

Weiter ist, falls sogar $\nu \geqq 2$ ist, nach der Minimaleigenschaft von ν auch

$$|u_h^{(\nu-2)}(\xi_{h,\,\nu-2})| \text{ beschränkt, etwa } \leqq A_{\nu-2} \tag{59}$$

für eine geeignet gewählte Zahlenfolge

$$\xi_{h,\,\nu-2} \qquad (h = 1, 2, \ldots).$$

Aus (58) folgt, daß $u_h^{(\nu-1)}(x)$ in $\mathfrak{i}_{h,\,\nu-1}$ für unendlich viele h ein festes Vorzeichen hat. Für diese h ergibt sich mit (59) wie vorhin

$$|u_h^{(\nu-2)}(x)| \geqq \left| \int\limits_{\xi_{h,\,\nu-2}}^{x} |u_h^{(\nu-1)}(x)|\,dx \right| - A_{\nu-2}.$$

In jedem Intervall $\mathfrak{i}_{h,\,\nu-1}$ gibt es ein Teilintervall $\mathfrak{i}_{h,\,\nu-2}$ der Länge $\frac{x_2-x_1}{4^2}$, so daß zwischen dem Teilintervall $\mathfrak{i}_{h,\,\nu-2}$ und dem Punkt $\xi_{h,\,\nu-2}$ noch ein Teilintervall $\mathfrak{i}^*_{h,\,\nu-2}$ von $\mathfrak{i}_{h,\,\nu-1}$ mit der Länge $\frac{x_2-x_1}{4^2}$ liegt. Für diese Intervalle folgt aus der obigen Ungleichung

$$\operatorname*{Min}_{x \text{ in } \mathfrak{i}_{h,\,\nu-2}} |u_h^{(\nu-2)}(x)| \geqq \int\limits_{\mathfrak{i}^*_{h,\,\nu-2}} |u_h^{(\nu-1)}(x)|\,dx - A_{\nu-2}$$
$$\geqq \frac{x_2-x_1}{4^2} \operatorname*{Min}_{x \text{ in } \mathfrak{i}_{h,\,\nu-1}} |u_h^{(\nu-1)}(x)| - A_{\nu-2},$$

also wegen (58)

$$\overline{\lim_{h\to\infty}} \operatorname*{Min}_{x \text{ in } \mathfrak{i}_{h,\,\nu-2}} |u_h^{(\nu-2)}(x)| = \infty.$$

In dieser Weise kann man fortfahren. Man erhält schließlich

$$\overline{\lim_{h\to\infty}} \operatorname*{Min}_{x \text{ in } \mathfrak{i}_{h,\,0}} |u_h(x)| = \infty$$

für eine Folge von Teilintervallen $\mathfrak{i}_{h,\,0}$ der Länge $\frac{x_2-x_1}{4^\nu}$ in dem Intervall $\langle x_1, x_2\rangle$.

Das führt aber zu einem Widerspruch, wenn für $\langle x_1, x_2\rangle$ ein Intervall gewählt wird, in dem $f_0(x) + g_0(x) \geqq \frac{1}{A} > 0$ ist. Dann ergibt sich nämlich

mit der Cauchy-Schwarzschen Ungleichung für jedes $\mathfrak{i}_{h,0}$, wenn dieses die Endpunkte ξ_h, η_h hat,

$$\left(\int_{\xi_h}^{\eta_h} 1 \cdot |u_h(x)|\, dx\right)^2 \leqq (\eta_h - \xi_h) \int_{\xi_h}^{\eta_h} u_h^2\, dx$$

$$\leqq \frac{x_2 - x_1}{4^\nu} A \int_{\xi_h}^{\eta_h} (f_0 u_h^2 + g_0 u_h^2)\, dx$$

$$\leqq \frac{x_2 - x_1}{4^\nu} A\, [\Phi(u_h) + \Psi(u_h)] \leqq B^2,$$

wo B nach (50) und (51) von h unabhängig ist. Hieraus folgt

$$\operatorname*{Min}_{x \text{ in } \mathfrak{i}_{h,0}} |u_h(x)| \leqq \frac{1}{\eta_h - \xi_h} \int_{\xi_h}^{\eta_h} |u_h(x)|\, dx \leqq \frac{4^\nu B}{x_2 - x_1}\,.$$

Damit ist der gewünschte Widerspruch erreicht und somit die Behauptung (a) bewiesen.

(b) Mit (a) ergibt sich nun die ursprüngliche Behauptung so: Aus (51) folgt, daß die Folge der $\Phi(u_h)$ beschränkt ist. Nach (44) ist dann wegen der Definitheit der Aufgabe [vgl. (44) und (8)] erst recht die Folge

$$\int_a^b (-1)^m f_m\, u_h^{(m)^2}\, dx \qquad (h = 1, 2, \ldots)$$

beschränkt, also, da $(-1)^m f_m > 0$ und stetig ist, auch

$$\int_a^b u_h^{(m)^2}\, dx \qquad (h = 1, 2, \ldots)$$

beschränkt, also nach der Cauchy-Schwarzschen Ungleichung

$$\int_a^b 1 \cdot |u_h^{(m)}|\, dx \leqq \left\{(b - a) \int_a^b u_h^{(m)^2}\, dx\right\}^{\frac{1}{2}}$$

beschränkt. Aus

$$u_h^{(m-1)}(x) = u_h^{(m-1)}(\xi_{h,m-1}) + \int_{\xi_{h,m-1}}^{x} u_h^{(m)}\, dx$$

folgt weiter, daß die $u_h^{(m-1)}$ in $\langle a, b\rangle$ gleichmäßig beschränkt sind, und hieraus mit

$$u_h^{(m-2)}(x) = u_h^{(m-2)}(\xi_{h,m-2}) + \int_{\xi_{h,m-2}}^{x} u_h^{(m-1)}\, dx$$

die gleichmäßige Beschränktheit der $u_h^{(m-2)}(x)$; usw. Damit ist die Behauptung bewiesen.

4.5. Jede der Folgen

$$u_1^{(\nu)}, u_2^{(\nu)}, \ldots \qquad (\nu = 0, 1, \ldots, m-1)$$

ist in $\langle a, b\rangle$ gleichgradig stetig.

Beweis. Für $0 \leqq \nu \leqq m-2$ ist nach 4.4 bei passend gewähltem A

$$|u_h^{(\nu)}(x_2) - u_h^{(\nu)}(x_1)| = \left|\int_{x_1}^{x_2} u_h^{(\nu+1)}(x)\,dx\right| \leqq |x_2 - x_1|\,A,$$

d. h. für $\nu \leqq m-2$ ist die Behauptung richtig. Für $\nu = m-1$ ist nach der Cauchy-Schwarzschen Ungleichung, da $(-1)^m f_m \geqq B > 0$ bei passend gewähltem B ist,

$$\begin{aligned}(u_h^{(m-1)}(x_2) - u_h^{(m-1)}(x_1))^2 &= \left(\int_{x_1}^{x_2} 1 \cdot u_h^{(m)}(x)\,dx\right)^2 \\ &\leqq |x_2 - x_1| \left|\int_{x_1}^{x_2} u_h^{(m)2}\,dx\right| \\ &\leqq |x_2 - x_1| \frac{1}{B}\int_a^b (-1)^m f_m\, u_h^{(m)2}\,dx \\ &\leqq |x_2 - x_1| \frac{\Phi(u_h)}{B},\end{aligned}$$

und hieraus folgt die Behauptung auch für $\nu = m-1$, da die $\Phi(u_h)$ wegen (51) beschränkt sind.

4.6. Für jede zulässige Funktion $w(x)$ ist

$$\Phi(u_h, w) - \lambda_1 \Psi(u_h, w) \to 0 \quad \text{für} \quad h \to \infty.$$

Beweis. Auch

$$v_h = w - u_h \Psi(u_h, w)$$

ist eine zulässige Funktion. Für diese ist nach (46)

$$\Phi(v_h) = \Phi(w) - 2\Psi(u_h, w)\Phi(u_h, w) + \Psi^2(u_h, w)\Phi(u_h).$$

Nach (50) und (51) sind die $\Phi(u_h)$, $\Psi(u_h)$ beschränkt, also nach (47) auch die $\Phi(u_h, w)$, $\Psi(u_h, w)$, also auch die $\Phi(v_h)$. Weiter ist nach (46) und (50)

$$\begin{aligned}\Psi(v_h) &= \Psi(w) - 2\Psi^2(u_h, w) + \Psi^2(u_h, w)\Psi(u_h) \\ &= \Psi(w) - \Psi^2(u_h, w),\end{aligned}$$

also sind die $\Psi(v_h)$ ebenfalls beschränkt. Schließlich ist

$$\begin{aligned}\Psi(u_h, v_h) &= \Psi(u_h, w) - \Psi(u_h, w)\Psi(u_h) \\ &= \Psi(u_h, w) - \Psi(u_h, w) = 0.\end{aligned}$$

Daher ist nach 4. 3

$$\Phi(u_h, v_h) \to 0 \quad \text{für} \quad h \to \infty,$$

d. h.

$$\Phi(u_h, w) - \Phi(u_h)\,\Psi(u_h, w) \to 0$$

oder

$$\Phi(u_h, w) - \lambda_1 \Psi(u_h, w) - [\Phi(u_h) - \lambda_1]\Psi(u_h, w) \to 0.$$

Da die $\Psi(u_h, w)$, wie vorher gezeigt, beschränkt sind, folgt hieraus die Behauptung nach (51).

4. 7. Beginn des Beweises der Behauptung (a): Für eine passend gewählte Teilfolge der Indizes h konvergieren die $u_h(x)$, nebst den $m-1$ ersten Ableitungen gegen eine zulässige Funktion $u(x)$ und deren $m-1$ ersten Ableitungen gleichmäßig im Intervall $\langle a, b\rangle$.

Beweis. Nach 4. 4 und 4. 5 ist die Folge

$$u_h^{(m-1)}(x) \qquad (h = 1, 2, \ldots)$$

in $\langle a, b\rangle$ gleichmäßig beschränkt und gleichgradig stetig. Nach dem Satz von Arzelà gibt es daher eine Teilfolge, die in $\langle a, b\rangle$ gleichmäßig konvergiert und die wieder mit $u_h^{(m-1)}(x)$ bezeichnet sei. Die Funktion

$$u_{m-1}(x) = \lim_{h\to\infty} u_h^{(m-1)}(x) \tag{60}$$

ist dann in $\langle a, b\rangle$ stetig. Wegen 4. 4 kann die Teilfolge überdies so gewählt werden, daß auch jede der Folgen

$$u_1^{(\nu)}(a),\ u_2^{(\nu)}(a),\ \ldots \qquad (\nu = 0, 1, \ldots, m-2) \tag{61}$$

konvergiert. Wegen der gleichmäßigen Konvergenz von (60) und der Konvergenz von (61) für $\nu = m-2$ ist dann[30]) auch die Folge

$$u_h^{(m-2)}(x) \qquad (h = 1, 2, \ldots)$$

gleichmäßig konvergent, und, wenn ihr Grenzwert $u_{m-2}(x)$ ist, gilt $u'_{m-2} = u_{m-1}$. Ebenso ergibt sich, daß die Folge

$$u_h^{(m-3)}(x) \qquad (h = 1, 2, \ldots)$$

gleichmäßig gegen eine Grenzfunktion $u_{m-3}(x)$ konvergiert, für die $u'_{m-3} = u_{m-2}$ gilt, und allgemein, daß

$$u_h^{(\nu)}(x) \qquad (h = 1, 2, \ldots)$$

für jedes $0 \leqq \nu \leqq m-1$ gegen eine Grenzfunktion $u_\nu(x)$ konvergiert, für die

$$u'_\nu(x) = u_{\nu+1}(x) \qquad (0 \leqq \nu \leqq m-2)$$

---

[30]) Vgl. z. B. K. Knopp, Theorie und Anwendung der unendlichen Reihen, 3. Aufl., S. 353. Berlin 1931; dort für unendliche Reihen statt Folgen formuliert.

gilt. Wird $u(x) = u_0(x)$ gesetzt, so ist also

$$\lim_{h \to \infty} u_h^{(\nu)}(x) = u^{(\nu)}(x) \quad \text{für} \quad 0 \leqq \nu \leqq m-1,$$

und zwar gleichmäßig in $\langle a, b \rangle$. Da in $\Psi(u_h)$ nur Ableitungen der Ordnung $\leqq n \leqq m-1$ vorkommen, ist $\Psi(u) = \lim \Psi(u_h) = 1$, also sicher $u \not\equiv 0$, und da die u_h die wesentlichen Randbedingungen (6) erfüllen und in diesen nur Ableitungen der Ordnung $\leqq m-1$ vorkommen, erfüllt auch u diese Randbedingungen und ist somit eine zulässige Funktion.

4. 8. Abschluß des Beweises der Behauptung (a): Die Funktion $u(x)$ von 4. 7 ist sogar $2m$-mal stetig differenzierbar und erfüllt die Differentialgleichung (1) mit $\lambda = \lambda_1$ sowie die Gleichung (49).

Beweis. Es sei $w(x)$ eine beliebige $(m+1)$-mal stetig differenzierbare Funktion, welche die Randbedingungen

$$w^{(\nu)}(a) = w^{(\nu)}(b) = 0 \quad \text{für} \quad \nu = 0, 1, \ldots, m \tag{62}$$

erfüllt. Für diese Funktion ist

$$F_0(u_h, w) = G_0(u_h, w) = 0,$$

da in diesen bilinearen Ausdrücken jedes Glied eine Ableitung $w^{(\nu)}(a)$ oder $w^{(\nu)}(b)$ mit $\nu \leqq m-1$ enthält. Daher ist nach (44)

$$\Phi(u_h, w) - \lambda_1 \Psi(u_h, w) = \int \sum_{\nu=0}^{m} (-1)^\nu f_\nu u_h^{(\nu)} w^{(\nu)} dx - \lambda_1 \int \sum_{\nu=0}^{n} (-1)^\nu g_\nu u_h^{(\nu)} w^{(\nu)} dx. \tag{63}$$

Die rechte Seite wird durch partielle Integration so umgeformt, daß jedes Glied den Faktor $w^{(m+1)}$ enthält. Zu dem Zweck wird

$$\begin{cases} f_\nu u_h^{(\nu)} = F_\nu^{[0]}(u_h), & g_\nu u_h^{(\nu)} = G_\nu^{[0]}(u_h), \\ \int_a^x F_\nu^{[x-1]}(u_h)\, dx = F_\nu^{[x]}(u_h), & \int_a^x G_\nu^{[x-1]}(u_h)\, dx = G_\nu^{[x]}(u_h) \end{cases} \tag{64}$$

gesetzt. Dann ist wegen (62)

$$\begin{aligned} \int f_\nu u_h^{(\nu)} w^{(\nu)} dx &= -\int F_\nu^{[1]}(u_h) w^{(\nu+1)} dx \\ &= (-1)^2 \int F_\nu^{[2]}(u_h) w^{(\nu+2)} dx \\ &= (-1)^r \int F^{[r]}(u_h) w^{(\nu+r)} dx \quad \text{für} \quad \nu + r \leqq m+1 \end{aligned}$$

und

$$\int g_\nu u_h^{(\nu)} w^{(\nu)} dx = (-1)^r \int G_\nu^{[r]}(u_h) w^{(\nu+r)}\, dx.$$

Für $r = m - \nu + 1$ erhält man hieraus

$$\begin{aligned} \int f_\nu u_h^{(\nu)} w^{(\nu)} dx &= (-1)^{m-\nu+1} \int F_\nu^{[m-\nu+1]}(u_h) w^{(m+1)} dx, \\ \int g_\nu u_h^{(\nu)} w^{(\nu)} dx &= (-1)^{m-\nu+1} \int G_\nu^{[m-\nu+1]}(u_h) w^{(m+1)} dx. \end{aligned}$$

Dies wird in die rechte Seite von (63) eingetragen. Da die linke Seite nach 4. 6 gegen 0 strebt, ist

$$(65)\quad \int \left\{ \sum_{\nu=0}^{m} F_\nu^{[m-\nu+1]}(u_h) - \lambda_1 \sum_{\nu=0}^{n} G_\nu^{[m-\nu+1]}(u_h) \right\} w^{(m+1)} dx \to 0 \text{ für } h \to \infty.$$

In der ersten Summe wird das Glied mit $\nu = m$ noch umgeformt in

$$(66)\quad F_m^{[1]}(u_h) = \int_a^x f_m u_h^{(m)} dx = [f_m u_h^{(m-1)}]_a^x - \int_a^x f_m' u_h^{(m-1)} dx.$$

Dann treten in allen Gliedern von (65) nur Ableitungen $u_h^{(\nu)}$ mit $\nu \leqq m-1$ auf, und man kann nach 4. 7 für eine wieder mit u_h bezeichnete Teilfolge den Grenzübergang gliedweise und unter dem Integralzeichen ausführen. Man erhält dann für $h \to \infty$

$$\int \left\{ \sum_{\nu=0}^{m} F_\nu^{[m-\nu+1]}(u) - \lambda_1 \sum_{\nu=0}^{n} G_\nu^{[m-\nu+1]}(u) \right\} w^{(m+1)} dx = 0,$$

und zwar für jede Funktion $w(x)$ mit den am Anfang des Beweises genannten Eigenschaften. Nach einem Satz von Zermelo[31]) ist daher

$$(67)\quad \sum_{\nu=0}^{m} F_\nu^{[m-\nu+1]}(u) - \lambda_1 \sum_{\nu=0}^{n} G_\nu^{[m-\nu+1]}(u) = P_m(x),$$

wo P_m ein Polynom des Grades $\leqq m$ ist. Die rechte Seite und somit auch die linke Seite ist also sicher m-mal stetig differenzierbar.

Jedes der Glieder mit $\nu \leqq m-1$ in (67) ist nach (64) für sich differenzierbar, also auch das höchste Glied der ersten Summe ($\nu = m$). Dieses ist durch die rechte Seite von (66) mit u statt u_h gegeben. Darin ist das letzte Integral differenzierbar. Daher ist auch das erste Glied $[f_m u_h^{(m-1)}]_a^x$ differenzierbar. Da f_m differenzierbar ist, ist also $u^{(m-1)}$ nochmals differenzierbar, und es gilt somit die vollständige Gleichung (66) mit u statt u_h.

Durch einmalige Differentiation von (67) folgt nun bei Berücksichtigung von (64)

$$f_m u^{(m)} + \sum_{\nu=0}^{m-1} F_\nu^{[m-\nu]}(u) - \lambda_1 \sum_{\nu=0}^{n} G_\nu^{[m-\nu]}(u) = P_{m-1}.$$

Da $n < m$ ist, sind hierin nach (64) alle Glieder der ersten und zweiten Summe einzeln differenzierbar, also auch $u^{(m)}$, da f_m differenzierbar ist. Die Ausführung der Differentiation ergibt

$$(f_m u^{(m)})' + f_{m-1} u^{(m-1)} + \sum_{\nu=0}^{m-2} F_\nu^{[m-\nu-1]}(u) - \lambda_1 \sum_{\nu=0}^{n} G_\nu^{[m-\nu-1]}(u) = P_{m-2},$$

wobei jedoch von der letzten Summe das Glied mit $\nu = n$ in der Gestalt $g_{m-1} u^{(m-1)}$ abzutrennen ist, falls $n = m-1$ ist. Jetzt sind links sicher

[31]) Math. Annalen **58** (1904), S. 558–564.

wieder alle Glieder bis auf das erste differenzierbar, also auch das erste, also ist $u^{(m)}$ zweimal differenzierbar. Führt man die Differentiationen bei Beachtung von (64) aus und fährt man in dieser Weise fort, so ergibt sich schließlich, daß u $2m$-mal stetig differenzierbar ist und die Gleichung

$$\sum_{\nu=0}^{m} (f_\nu u^{(\nu)})^{(\nu)} = \lambda_1 \sum_{\nu=0}^{n} (g_\nu u^{(\nu)})^{(\nu)},$$

d. h. die Gleichung (1) mit $\lambda = \lambda_1$ erfüllt.

Es bleibt noch zu beweisen, daß u die Gleichung (49) erfüllt. Da u, wie bewiesen, eine zulässige Funktion ist, die sogar $2m$-mal stetig differenzierbar ist, kann in 4. 6 $w = u$ gewählt werden. D. h. es ist

$$\Phi(u_h, u) - \lambda_1 \Psi(u_h, u) \to 0 \quad \text{für} \quad h \to \infty.$$

Nach 4. 7 kann hierin bei allen Gliedern, die nur Ableitungen $u_h^{(\nu)}$ mit $\nu \leqq m - 1$ enthalten, der Grenzübergang ausgeführt werden, indem $u_h = u$ gesetzt wird. Das einzige Glied, das eine höhere Ableitung enthält, ist, abgesehen vom Vorzeichen, nach (44)

$$\int f_m u_h^{(m)} u^{(m)} dx = [u_h^{(m-1)} f_m u^{(m)}]_a - \int u_h^{(m-1)} (f_m u^{(m)})' dx.$$

Jetzt kann auch hierin der Grenzübergang ausgeführt werden, indem man rechts $u_h = u$ setzt. Aus der rechten Seite erhält man aber wieder die linke Seite mit $u_h = u$. Aus der obigen Limesgleichung erhält man also in der Tat

$$\Phi(u) - \lambda_1 \Psi(u) = 0,$$

wie behauptet war.

4. 9. Beweis der Behauptung (b). Die Schlüsse der vorangehenden Nummern gelten auch, wenn alle $u_h = u$ übereinstimmen. Wenn für eine zulässige Funktion $u(x)$

$$\frac{\Phi(u)}{\Psi(u)} = \lambda_1 \text{ und } \Psi(u) \neq 0 \tag{68}$$

ist, wo λ_1 durch (48) bestimmt ist, so ist daher $u(x)$ sogar $2m$-mal stetig differenzierbar und eine eigentliche Lösung von

$$F(u) - \lambda_1 G(u) = 0. \tag{69}$$

Es sei nun $w(x)$ eine beliebige zulässige Funktion. Da $u(x)$ $2m$-mal stetig differenzierbar ist, kann die Formel (17) angewendet werden. Werden in $[T(u, v)]_a$ für u und v die wesentlichen Randbedingungen eingetragen, so ergibt sich (vgl. den letzten Absatz von 2. 5)

$$\int [F(u) - \lambda_1 G(u)] w \, dx = \int \left\{ \sum_{\nu=0}^{m} (-1)^\nu f_\nu u^{(\nu)} w^{(\nu)} - \lambda_1 \sum_{\nu=0}^{n} (-1)^\nu g_\nu u^{(\nu)} v^{(\nu)} \right\} dx$$
$$+ \overline{F}(u, w) - \lambda_1 \overline{G}(u, w).$$

Nach (69) ist hierin die linke Seite $= 0$. Nach (68) ist, wenn die Ausdrücke (44) eingetragen werden,

$$0 = \int \left\{ \sum_{r=0}^{m} (-1)^r f_r u^{(r)} w^{(r)} - \lambda_1 \sum_{r=0}^{n} (-1)^r g_r u^{(r)} w^{(r)} \right\} dx + F_0(u,w) - \lambda_1 G_0(u,w).$$

Aus den beiden Gleichungen folgt

$$\overline{F}(u,w) - \lambda_1 \overline{G}(u,w) - \{F_0(u,w) - \lambda_1 G_0(u,w)\} = 0$$

für beliebige zulässige Funktionen w, insbesondere also für beliebige freie Ableitungen von w. Nach 2. 5 erfüllt dann u auch die restlichen Randbedingungen (7), also alle Randbedingungen, und ist somit eine zu λ_1 gehörige Eigenfunktion.

Endlich ist λ_1 der kleinste Eigenwert. Denn ist λ_0 irgendein Eigenwert und $y(x)$ eine zu diesem gehörige Eigenfunktion, so ist nach (17), 2. 5 und (44), wenn alle Randbedingungen eingetragen werden,

$$0 = \int [F(y) - \lambda_0 G(y)]\, y\, dx = \Phi(y) - \lambda_0 \Psi(y).$$

Hierin ist

$$\int y\, G(y)\, dx = \Psi(y) \neq 0,$$

da sonst nach der obigen Gleichung auch

$$\int y\, F(y)\, dx = \Phi(y) = 0$$

wäre, und das nach S. 71. Fußnote 20 ausgeschlossen ist. Es ist also

$$\lambda_0 = \frac{\Phi(y)}{\Psi(y)},$$

und dieser Bruch ist $\geqq \lambda_1$ nach der Definition (48) von λ_1.

§ 5.

Zusätzliche Bemerkungen.

5. 1. Die höheren Eigenwerte. Die Festlegung des kleinsten Eigenwertes nach Satz 1 läßt sich in der bekannten Weise auch auf die höheren Eigenwerte ausdehnen.

Satz 2. *Sind $\lambda_1 \leqq \cdots \leqq \lambda_r$ die ersten r Eigenwerte und ist $\psi_1(x), \ldots, \psi_r(x)$ ein zu diesem gehöriges Orthogonalsystem von Eigenfunktionen, d. h. ist*

$$\Psi(\psi_p, \psi_q) = 0 \qquad (p \neq q;\ p, q \leqq r),$$

so gibt es stets einen nächstgrößeren Eigenwert λ_{r+1}, und es ist

(70)
$$\lambda_{r+1} = \operatorname*{Min}_{u} \frac{\Phi(u)}{\Psi(u)},$$

wobei jetzt nur solche zulässigen Funktionen $u(x)$ zu betrachten sind, für die

$$\Psi(u) \neq 0 \quad \text{und} \quad \Psi(u, \psi_p) = 0 \qquad (p = 1, \ldots, r)$$

ist.

Es gibt also unendlich viele Eigenwerte, und man erhält durch dieses Verfahren jeden Eigenwert in seiner Vielfachheit.

Für den Beweis dieses Satzes ist nur folgende zusätzliche Überlegung nötig: Sind $\psi_1, \ldots, \psi_r$ zulässige Funktionen, für die

$$\Psi(\psi_p) \neq 0^{32}), \quad \Psi(\psi_p, \psi_q) = 0 \qquad (p \neq q;\ p, q \leqq r) \tag{71}$$

gilt, so gibt es zulässige Funktionen $u(x)$ mit

$$\Psi(u) \neq 0, \quad \Psi(u, \psi_p) = 0 \qquad (p = 1, \ldots, r). \tag{72}$$

Man wähle nämlich im Innern von $\langle a, b\rangle$ ein Intervall $\langle \alpha, \beta\rangle$, in dem $g_n(x) \neq 0$ ist. Das Intervall soll außerdem so klein gewählt werden, daß

$$\sum_{q=1}^{r} \frac{1}{\Psi(\psi_q)} \int_{\alpha}^{\beta} \sum_{\nu=0}^{n} (-1)^\nu g_\nu \psi_q^{(\nu)2}\, dx < 1 \tag{73}$$

ist. Man wähle weiter eine m-mal stetig differenzierbare Funktion $u_0(x)$, die $\neq 0$ in $\alpha < x < \beta$ und sonst $= 0$ ist; dann ist offenbar $F_0(u_0, \psi_p) = 0$, also

$$\Psi(u_0, \psi_p) = \int_{\alpha}^{\beta} \sum_{\nu=0}^{n} (-1)^\nu g_\nu u_0^{(\nu)} \psi_p^{(\nu)}\, dx \qquad (p = 1, \ldots, r). \tag{74}$$

Die Funktion u_0 läßt sich außerdem so wählen, daß $u_0^{(n)} \not\equiv 0$, also

$$\Psi(u_0) = \int_{\alpha}^{\beta} \sum_{\nu=0}^{n} (-1)^\nu g_\nu u_0^{(\nu)2}\, dx > 0 \tag{75}$$

ist. Für beliebige Zahlen ϱ_q ist auch

$$u(x) = u_0 + \sum_{q=1}^{r} \varrho_q \psi_q$$

eine zulässige Funktion, und wegen (71) ist

$$\Psi(u, \psi_p) = \Psi(u_0, \psi_p) + \varrho_p \Psi(\psi_p) \qquad (p = 1, \ldots, r) \tag{76}$$

und

$$\Psi(u) = \Psi(u_0) + 2 \sum_{q=1}^{r} \varrho_q \Psi(u_0, \psi_q) + \sum_{q=1}^{r} \varrho_q^2 \Psi(\psi_q).$$

[32]) Für Eigenfunktionen ψ_p ist diese Ungleichung von selbst erfüllt.

Nach (76) können die ϱ_p so gewählt werden, daß die letzten r der Gleichungen (72) erfüllt sind. Dann ist

$$\Psi(u) = \Psi(u_0) - \sum_{q=1}^{r} \varrho_q^2 \Psi(\psi_q)$$
$$= \Psi(u_0) - \sum_{q=1}^{r} \frac{\Psi^2(u_0, \psi_q)}{\Psi(\psi_q)}.$$

Hierin ist nach (74), der Cauchy-Schwarzschen Ungleichung[33]) und (75)

$$\Psi^2(u_0, \psi_q) = \Big(\int_\alpha^\beta \sum_{\nu=0}^{n} \sqrt{(-1)^\nu g_\nu}\, u_0^{(\nu)} \cdot \sqrt{(-1)^\nu g_\nu}\, \psi_p^{(\nu)}\, dx\Big)^2$$
$$\leqq \int_\alpha^\beta \sum_{\nu=0}^{n} (-1)^\nu g_\nu\, u_0^{(\nu)2}\, dx \cdot \int_\alpha^\beta \sum_{\nu=0}^{n} (-1)^\nu g_\nu\, \psi_q^{(\nu)2}\, dx$$
$$= \Psi(u_0) \int_\alpha^\beta \sum_{\nu=0}^{n} (-1)^\nu g_\nu\, \psi_q^{(\nu)2}\, dx.$$

Daher ist

$$\Psi(u) \geqq \Psi(u_0)\Big(1 - \sum_{q=1}^{r} \frac{1}{\Psi(\psi_q)} \int_\alpha^\beta \sum_{\nu=0}^{n} (-1)^\nu g_\nu\, \psi_q^{(\nu)2}\, dx\Big) > 0,$$

wegen (73) und (75).

Mit Benutzung dieser Hilfsbetrachtung ergibt sich der Satz 2 durch Schluß von r auf $r+1$. Ist der Satz schon für $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ bewiesen, so gibt es eine zulässige Funktion $u(x)$, welche die Relationen (72) erfüllt. Man macht nun den Ansatz (70) und folgt dem Beweis zu Satz 1. Es ergibt sich dann, daß λ_{r+1} der erste Eigenwert $\geqq \lambda_r$ ist und daß man eine zu λ_{r+1} gehörige Eigenfunktion erhält, die zu $\psi_1, \ldots, \psi_r$ orthogonal ist.

5. 2. Besselsche Ungleichung und Parsevalsche Formel. Es sei jetzt $\psi_1(x), \psi_2(x), \ldots$ ein vollständiges normiertes Orthogonalsystem von Eigenfunktionen der Eigenwertaufgabe (1), (2), also

$$\Psi(\psi_p, \psi_q) = e_{p,q}; \tag{77}$$

$\lambda_1 \leqq \lambda_2 \leqq \cdots$ seien die zugehörigen Eigenwerte. In K III, S. 269 waren als Fourier-Koeffizienten einer stetigen Funktion $\varphi(x)$ in bezug auf diese Eigenwertaufgabe die Zahlen

$$a_p = \int \varphi(x) G(\psi_p)\, dx \tag{78}$$

bezeichnet. Für zulässige Funktionen $\varphi(x)$ in dem dortigen Sinne, d. h. für Funktionen $\varphi(x)$, die $2m$-mal stetig differenzierbar sind und alle $2m$ Randbedingungen erfüllen, waren dann Besselsche Ungleichung und Parsevalsche Formel abgeleitet.

[33]) Für die hier benutzte Form der Cauchy-Schwarzschen Ungleichung siehe K III, S. 268, Fußnote 16.

Wird für zulässige Funktionen $\varphi(x)$ in dem jetzigen Sinne der Begriff der *Fourier-Koeffizienten* dahin abgeändert, daß diese

$$a_p = \Psi(\varphi, \psi_p) \tag{79}$$

sind[34]), so besteht der

Satz 3. *Für die Fourier-Koeffizienten einer zulässigen Funktion $\varphi(x)$ gilt*

$$\sum_p \lambda_p a_p^2 \leqq \Phi(\varphi) \quad (\textit{Besselsche Ungleichung}), \tag{80}$$

$$\sum_p a_p^2 = \Psi(\varphi) \quad (\textit{Parsevalsche Formel}). \tag{81}$$

Ist auch $\psi(x)$ eine zulässige Funktion und sind die b_p ihre Fourier-Koeffizienten, so ist

$$\sum_p a_p b_p = \Psi(\varphi, \psi). \tag{82}$$

Beweis. Aus (17) erhält man für $\lambda = \lambda_p$, $u = \psi_p$, $v = \varphi$, da dann der Integrand der linken Seite Null ist,

$$\int \left\{ \sum_{\nu=0}^{m} (-1)^\nu f_\nu \psi_p^{(\nu)} \varphi^{(\nu)} - \lambda_p \sum_{\nu=0}^{n} g_\nu \psi_p^{(\nu)} \varphi^{(\nu)} \right\} dx + [R(\psi_p, \varphi)]_a^b - \lambda_p [S(\psi_p, \varphi)]_a^b = 0.$$

Trägt man nun in die Restteile $[R(\psi_p, \varphi)]_a^b$, $[S(\psi_p, \varphi)]_a^b$ alle $2m$ Randbedingungen für die ψ_p und die wesentlichen Randbedingungen für φ ein, so gehen diese Ausdrücke nach 2. 5 in $F_0(\psi_p, \varphi)$, $G_0(\psi_p, \varphi)$ über. Bei Berücksichtigung von (44) wird daher aus der obigen Gleichung

$$\Phi(\varphi, \psi_p) = \lambda_p \Psi(\varphi, \psi_p).$$

Hiermit und mit (77), (79) erhält man für beliebige h nach (46)

$$\begin{aligned} \Phi\Big(\varphi - \sum_{p=1}^{h} a_p \psi_p\Big) &= \Phi(\varphi) - 2\sum_p a_p \Phi(\varphi, \psi_p) + \sum_{p,q} a_p a_q \Phi(\psi_p, \psi_q) \\ &= \Phi(\varphi) - 2\sum_p \lambda_p a_p \Psi(\varphi, \psi_p) + \sum_{p,q} a_p a_q \lambda_q \Psi(\psi_p, \psi_q) \\ &= \Phi(\varphi) - 2\sum_p \lambda_p a_p^2 + \sum_p \lambda_p a_p^2 \\ &= \Phi(\varphi) - \sum_p \lambda_p a_p^2 . \end{aligned} \tag{83}$$

Da die Eigenwertaufgabe definit ist, ist die linke Seite dieser Gleichung $\geqq 0$. Damit ist (80) bereits bewiesen.

Für

$$\chi_h(x) = \varphi - \sum_{p=1}^{h} a_p \psi_p$$

und $1 \leqq q \leqq h$ ist nach (79) und (77)

$$\Psi(\chi_h, \psi_q) = \Psi(\varphi, \psi_q) - \sum_p a_p \Psi(\psi_p, \psi_q) = a_q - a_q = 0,$$

[34]) Für zulässige Funktionen φ in dem früheren Sinne stimmen die rechten Seiten von (78) und (79) nach 2. 5 überein.

d. h. χ_h orthogonal zu $\psi_1, \ldots, \psi_h$. Ist $\Psi(\chi_h) > 0$, so ist daher nach Satz 2

$$\lambda_{h+1} \leqq \frac{\Phi(\chi_h)}{\Psi(\chi_h)},$$

also, wenn h so groß gewählt wird, daß $\lambda_{h+1} > 0$ ist,

$$\Psi(\chi_h) \leqq \frac{\Phi(\chi_h)}{\lambda_{h+1}},$$

und das gilt auch, wenn $\Psi(\chi_h) = 0$ ist. Nach (83) ist $\Phi(\chi_h) \leqq \Phi(\varphi)$. Für $h \to \infty$ ist daher $\Psi(\chi_h) \to 0$. Es ist aber

$$\begin{aligned}\Psi(\chi_h) &= \Psi(\varphi) - 2\sum_p a_p \Psi(\varphi, \psi_p) + \sum_{p,q} a_p a_q \Psi(\psi_p, \psi_q)\\ &= \Psi(\varphi) - 2\sum a_p^2 + \sum a_p^2\\ &= \Psi(\varphi) - \sum_{p=1}^{h} a_p^2,\end{aligned}$$

also

$$\sum_{p=1}^{h} a_p^2 \to \Psi(\varphi),$$

womit (81) bewiesen ist.

Aus (81) mit $\varphi + \psi$ statt φ ergibt sich

$$\sum (a_p + b_p)^2 = \Psi(\varphi + \varphi),$$

also

$$\sum a_p^2 + \sum b_p^2 + 2\sum a_p b_p = \Psi(\varphi) + \Psi(\psi) + 2\Psi(\varphi, \psi).$$

Hieraus folgt, wenn man (81) und dieselbe Gleichung für ψ statt φ subtrahiert, die Gleichung (82).

5. 3. Festlegung der Eigenwerte durch das Maximum-Minimum-Prinzip.

Satz 4. *Für integrierbare*[35]) *Funktionen* $w_\nu(x)$ *sei*

$$m(w_1, \ldots, w_{p-1}) = \operatorname*{fin}_y \frac{\Phi(y)}{\Psi(y)},$$

wo die y *beliebige zulässige Funktionen sein dürfen, für die* $\Psi(y) > 0$ *und*

$$\int w_\nu\, y\, dx = 0 \qquad (\nu = 1, \ldots, p-1) \tag{84}$$

ist. Dann ist $m \leqq \lambda_p$ *und*

$$\lambda_p = \operatorname*{Max}_w m(w_1, \ldots, w_{p-1}).$$

Beweis. Für den Beweis des ersten Teiles genügt es, eine zulässige Funktion y anzugeben, welche die oben angegebenen Eigenschaften besitzt und für die $\Phi(y) \leqq \lambda_p \Psi(y)$ ist. Zu dem Zweck wird

$$y = \sum_{q=1}^{p} a_q \psi_q$$

[35]) Der Satz ist auch richtig, wenn man „integrierbar" durch „stetig" ersetzt.

gesetzt. Dann ist

$$\Psi(y) = \sum_{q,r} a_q a_r \Psi(\psi_q, \psi_r) = \sum_q a_q^2 > 0,$$

falls nicht alle a_q Null sind. Die Gleichungen (84) sind erfüllt, wenn

$$\sum_{q=1}^{p} a_q \int w_\nu \psi_q \, dx = 0 \qquad (\nu = 1, \ldots, p-1)$$

ist. Das sind $p-1$ Gleichungen für p unbekannte a_q. Es gibt also eine nicht aus lauter Nullen bestehende Lösung. Für diese ist dann

$$\Phi(y) = \sum_{q,r} a_q a_r \Phi(\psi_q, \psi_r) = \sum_{q,r} a_q a_r \lambda_r \Psi(\psi_q, \psi_r)$$
$$= \sum_q \lambda_q a_q^2 \leqq \lambda_p \sum_q a_q^2 = \lambda_p \Psi(y).$$

Da für $w_\nu = \psi_\nu$ nach Satz 2 $m = \lambda_p$ ist, ist der Satz vollständig bewiesen.

5. 4. Das Verfahren von Ritz und Kryloffs Satz[36]).

Satz 5. *Sind $u_1(x), \ldots, u_h(x)$ ein System zulässiger Funktionen, für das die Orthogonalitätsrelationen*

$$\Psi(u_p, u_q) = 0 \qquad (p \neq q) \tag{85}$$

und außerdem die Ungleichungen

$$\Psi(u_p) > 0 \tag{86}$$

bestehen, so sind die Nullstellen der Determinante

$$D(\lambda) = \operatorname{Det} |\Phi(u_p, u_q) - \lambda e_{p,q} \Psi(u_p, u_q)| \qquad (p, q = 1, \ldots, h) \tag{87}$$

sämtlich reell. Sind sie, der Größe nach geordnet,

$$\bar{\lambda}_1 \leqq \cdots \leqq \bar{\lambda}_h, \tag{88}$$

so ist

$$\bar{\lambda}_p \geqq \lambda_p \qquad (p = 1, \ldots, h). \tag{89}$$

Beweis. Auf die Determinante (87) kommt man, wenn man in dem Satz 1 statt der Menge aller zulässiger Funktionen $y(x)$ nur die Funktionen

$$\bar{y}(x) = \sum_{\nu=1}^{h} a_\nu u_\nu \tag{90}$$

betrachtet. Für diese Funktionen ist nach (45), (46) und (85)

$$\begin{cases} \Phi(\bar{y}) = \sum\limits_{p,q=1}^{h} a_p a_q \Phi(u_p, u_q), \\ \Psi(\bar{y}) = \sum\limits_{p,q=1}^{h} a_p a_q \Psi(u_p, u_q) = \sum\limits_{p=1}^{h} a_p^2 \Psi(u_p). \end{cases} \tag{91}$$

[36]) Vgl. hierzu die in K I, § 5 behandelte, von Galerkin herrührende Variante des Verfahrens von Ritz, außerdem zur Literatur: E. Kamke, Differentialgleichungen: Lösungsmethoden und Lösungen, S. 220. Leipzig 1942.

Aus der Variationsaufgabe (10) oder, was auf dasselbe hinausläuft, der Aufgabe $\Phi(y) = \text{Min}$ unter der Nebenbedingung $\Psi(y) = 1$, wird dann die Aufgabe: Die a_p sollen so bestimmt werden, daß

$$\Phi(\bar{y}) = \text{Min} \tag{92}$$

bei der Nebenbedingung $\Psi(\bar{y}) = 1$ wird. Da die Eigenwertaufgabe definit ist, ist $\Phi(\bar{y}) \geqq 0$ und somit die obige Minimumsaufgabe lösbar. Die Regeln der Differentialrechnung ergeben für die a_p und einen ebenfalls noch zu bestimmenden Parameter λ die Gleichungen

$$\sum_{q=1}^{h} a_q \Phi(u_p, u_q) = \lambda a_p \Psi(u_p) \qquad (p = 1, \ldots, h). \tag{93}$$

Dieses homogene Gleichungssystem hat genau dann eine eigentliche Lösung, wenn $D(\lambda) = 0$ ist.

Wegen der Symmetrie von (87) in den Indizes p, q hat $D(\lambda)$ nur reelle Nullstellen.

Für jede Nullstelle λ hat (93) eine eigentliche Lösung, und diese kann so normiert werden, daß $\Psi(\bar{y}) = 1$ ist. Multipliziert man dann (93) mit a_p und addiert man die Gleichungen, so erhält man wegen (91)

$$\Phi(\bar{y}) = \lambda \Psi(\bar{y}) = \lambda.$$

Da $\Phi(\bar{y}) \geqq 0$ ist, sind alle Nullstellen $\lambda \geqq 0$, und die kleinste Nullstelle $\bar{\lambda}_1$ ist der gesuchte Minimalwert von $\Phi(\bar{y})$. Da hier gegenüber Satz 1 der Bereich der zulässigen Funktionen weiter eingeschränkt ist, ist $\bar{\lambda}_1 \geqq \lambda_1$.

Für den allgemeinen Beweis von (89) wird der Satz 4 benutzt und außerdem der entsprechende Satz über die Eigenwerte $\varkappa_1 \leqq \cdots \leqq \varkappa_h$ der quadratischen Form

$$K(x, x) = \sum_{p, q=1}^{h} k_{p, q} x_p x_q,$$

d. h. der Nullstellen der Determinante

$$\Delta(\lambda) = \text{Det}\,|k_{p, q} - \lambda e_{p, q}|.$$

Es ist[37])

$$\varkappa_r \geqq \overline{m}_r(\alpha), \tag{94}$$

wo

$$\overline{m}_r(\alpha) = \underset{x_p}{\text{fin}}\, K(x, x)$$

ist und hierin zur Konkurrenz alle solche Zahlen x_p zugelassen sind, welche die Norm

$$\sum_{p=1}^{h} x_p^2 = 1 \tag{95}$$

[37]) R. Courant-D. Hilbert, Methoden der mathematischen Physik I, 2. Aufl., S. 27, 29. Berlin 1931.

haben und $r-1$ beliebig gegebene Gleichungen

$$\sum_{q=1}^{\hbar} \alpha_{\nu,q}\, x_q = 0 \qquad (\nu = 1, \ldots, r-1) \tag{96}$$

erfüllen.

Für

$$k_{p,q} = \frac{\Phi(u_p, u_q)}{\sqrt{\Psi(u_p)\,\Psi(u_q)}}, \qquad x_p = a_p \sqrt{(\Psi u_p)}$$

wird

$$K(x, x) = \sum_{p,q=1}^{\hbar} \Phi(u_p, u_q)\, a_p\, a_q = \Phi(\bar{y})$$

und $\Delta(\lambda)$, abgesehen von einem Faktor $\neq 0$, gleich $D(\lambda)$, d. h. $\varkappa_r = \bar{\lambda}_r$. Weiter wird aus (95)

$$1 = \sum_{p=1}^{\hbar} a_p^2\, \Psi(u_p) = \Psi(\bar{y}). \tag{97}$$

Wird schließlich für die in Satz 4 vorkommenden Funktionen w_ν

$$\alpha_{\nu,q} = \frac{1}{\sqrt{\Psi(u_q)}} \int w_\nu\, u_q\, dx$$

gewählt, so wird aus (96)

$$0 = \sum_{q=1}^{\hbar} a_q \int w_\nu u_q\, dx = \int w_\nu \bar{y}\, dx. \tag{98}$$

Aus (94) wird also

$$\bar{\lambda}_r \geqq \underline{\text{fin}}\ \Phi(\bar{y}),$$

wo $\bar{y}$ durch (90) gegeben ist und zur Konkurrenz solche a_p, d. h. solche $\bar{y}$ zugelassen sind, für die (97) und (98) erfüllt ist. Diese $\bar{y}$ bilden eine Teilmenge der in Satz 4 zugelassenen y. Daher ist nach (94) und Satz 4

$$\bar{\lambda}_r \geqq \overline{m}_r \geqq m(w_1, \ldots, w_{r-1}),$$

also auch

$$\bar{\lambda}_r \geqq \operatorname*{Max}_{w} m = \lambda_r.$$

(Eingegangen am 5. Januar 1942.)

Zur Stetigkeit der Wurzeln einer algebraischen Gleichung.

Herrn Konrad Knopp
zum 60. Geburtstag am 22. Juli 1942 gewidmet.

Von

Hellmuth Kneser in Tübingen.

Der Satz von der Stetigkeit der Wurzeln einer algebraischen Gleichung besagt in seiner bescheidensten Gestalt das Folgende:

Ist c eine Nullstelle des Polynoms

$$f^*(x) = x^n + \sum_{\nu=0}^{n-1} a_\nu^* x^\nu,$$

so hat das Polynom

$$f(x) = x^n + \sum_{\nu=0}^{n-1} a_\nu x^\nu$$

beliebig nahe bei c eine Nullstelle, sobald sich die Beiwerte a_ν hinreichend wenig von den entsprechenden Beiwerten a_ν^* unterscheiden.

Den kürzesten Beweis hierfür findet man in van der Waerdens Einführung in die algebraische Geometrie (1939) auf S. 48. Im Sonderfalle $c = 0$ lautet er folgendermaßen. Ist $c = 0$ eine Nullstelle von $f^*(x)$, so ist $a_0^* = 0$. Sind nun $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ die Nullstellen von $f(x)$ und ist α_1 die — oder eine — vom kleinsten Betrage, so ist

$$|\alpha_1|^n \leqq |\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_n| = |a_0|,$$
$$|\alpha_1| \leqq \sqrt[n]{|a_0|},$$

also so klein wie man will, wenn nur $|a_0| = |a_0 - a_0^*|$ hinreichend klein ist.

Außer durch seine Kürze zeichnet sich dieser Beweis dadurch aus, daß er mehr liefert als behauptet war: sein Ergebnis ist ganz unabhängig von den Werten $a_1, \ldots, a_{n-1}$; der auf diese bezügliche Teil der Voraussetzung ist also überflüssig. Das ist auch deshalb bemerkenswert, weil umgekehrt aus der Kleinheit von $|\alpha_1|$ die von $|a_0|$ erst dann folgt, wenn man z. B. für die Beträge von $\alpha_2, \ldots, \alpha_n$ eine obere Schranke kennt.

Zwar nicht ganz die schlagende Kürze, wohl aber die Mehrleistung des van der Waerdenschen Beweises läßt sich nun auch auf den vollen Stetigkeitssatz übertragen. Dieser lautet:

A. *Ist* $1 \leqq m \leqq n$ *und ist* c *eine* m*-fache Nullstelle des Polynoms*

$$f^*(x) = x^n + \sum_{\nu=0}^{n-1} a_\nu^* x^\nu,$$

so hat das Polynom

$$f(x) = x^n + \sum_{\nu=0}^{n-1} a_\nu x^\nu$$

beliebig nahe bei c *mindestens* m *Nullstellen, sobald sich die Beiwerte* a_ν *hinreichend wenig von den entsprechenden Beiwerten* a_ν^* *unterscheiden.*

Auch hier wird sich im Sonderfalle $c = 0$, d. h. $a_0^* = \cdots = a_{m-1}^* = 0$ zeigen, daß es nur auf die Beiwerte $a_0, \ldots, a_{m-1}$ ankommt. Bedenken wir, daß die Beiwerte a_ν bis aufs Vorzeichen gleich den symmetrischen Grundpolynomen in $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ sind, so können wir den Satz als eine Aussage über die Beträge irgendwelcher komplexer Zahlen $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ und ihrer symmetrischen Grundpolynome aussprechen. Bezeichnen wir mit s_ν immer das symmetrische Grundpolynom ν-ten Grades in den dahinter angegebenen Argumenten, so lautet unser Satz:

B(m). *Ist* $1 \leqq m \leqq n$ *und sind* $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ *komplexe Zahlen, geordnet nach nicht abnehmenden Beträgen*:

$$|\alpha_1| \leqq |\alpha_2| \leqq \cdots \leqq |\alpha_n|, \tag{1}$$

so gibt es für den Betrag von α_m *eine obere Schranke* φ_m, *die nur abhängt von den Beträgen der* m *letzten symmetrischen Grundpolynome in* $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$, *und die mit diesen Beträgen gegen Null strebt*:

$$|\alpha_m| \leqq \varphi_m(t_1, \ldots, t_m), \quad t_\nu = |s_{n-\nu+1}(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)|, \tag{2}$$

$$\varphi_m \to 0, \quad \text{wenn } t_1 \to 0, \ \ldots, \ t_m \to 0. \tag{3}$$

Sei $0 \leqq k < n$ und B(m) bewiesen für $m \leqq k$ — im Falle $k = 0$ ist damit nichts vorausgesetzt; wir wollen B($k+1$) beweisen. So wie man VAN DER WAERDENS Beweis auffassen kann als das Aufstellen einer durch α_1 allein bestimmten unteren Schranke für t_1, so wollen wir eine untere Schranke für t_{k+1} aufsuchen. Das würde sofort zum Ziele führen, wenn s_{n-k} allein aus dem Gliede $\alpha_{k+1} \ldots \alpha_n$ bestünde. Die störenden anderen Glieder nach oben abzuschätzen geht nicht ohne weiteres an, da sie Faktoren $\alpha_{k+2}, \ldots, \alpha_n$ enthalten können, über deren Größe wir nichts wissen. Wir kommen zum Ziele, indem wir aus allen Gliedern das Hauptglied $\alpha_{k+1} \ldots \alpha_n$ als Faktor herausziehen.

Ist $\alpha_{k+1} = 0$, so gilt (2) mit $m = k+1$ und mit jedem nicht negativen Wert von φ_{k+1}, also auch mit dem, den wir nachher einführen werden. Andernfalls sind wegen (1) auch $\alpha_{k+2}, \ldots, \alpha_n$ von Null verschieden, und es gilt

$$(4)\quad s_{n-k}(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) = \alpha_{k+1} \ldots \alpha_n \left[1 + \sum_{\nu=1}^{r} s_\nu(\alpha_1, \ldots, \alpha_k)\, s_\nu(\alpha_{k+1}^{-1}, \ldots, \alpha_n^{-1})\right],$$

worin

$$r = \operatorname{Min}(k, n-k)$$

gesetzt ist. In der Tat: jedes Glied in $s_{n-k}(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ außer dem Hauptgliede $\alpha_{k+1} \ldots \alpha_n$ enthält eine Anzahl $\nu \geqq 1$ von Faktoren des Hauptgliedes nicht und statt dessen die gleiche Anzahl voneinander verschiedener Faktoren aus der Reihe $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$. Es muß daher $\nu \leqq k$ und $\nu \leqq n-k$, d. h. $\nu \leqq r$ sein, und jedes Glied der beschriebenen Art kommt in s_{n-k} mit dem Beiwert 1 vor. Gerade das ist aber in (4) ausgesagt. Nehmen wir zu (4) hinzu die aus (2) mit $m = \nu \leqq k$ folgende Ungleichung

$$|s_\nu(\alpha_1, \ldots, \alpha_k)| \leqq s_\nu(\varphi_1, \ldots, \varphi_k)$$

sowie die aus (1) sich ergebenden Ungleichungen

$$|\alpha_{k+1} \ldots \alpha_n| \geqq |\alpha_{k+1}|^{n-k},$$

$$|s_\nu(\alpha_{k+1}^{-1}, \ldots, \alpha_n^{-1})| \leqq \binom{n-k}{\nu} |\alpha_{k+1}|^{-\nu},$$

so erhalten wir

$$t_{k+1} = |s_{n-k}(\alpha_1, \ldots \alpha_n)|$$

$$\geqq |\alpha_{k+1}|^{n-k} \left[1 - \sum_{\nu=1}^{r} \binom{n-k}{\nu} s_\nu(\varphi_1, \ldots, \varphi_k)\, |\alpha_{k+1}|^{-\nu}\right],$$

$$(5)\quad \sum_{\nu=1}^{r} \binom{n-k}{\nu} s_\nu(\varphi_1, \ldots, \varphi_k)\, |\alpha_{k+1}|^{-\nu} + t_{k+1} |\alpha_{k+1}|^{-(n-k)} \geqq 1,$$

Die Beiwerte der Potenzen von $|\alpha_{k+1}|$ auf der linken Seite von (5) sind nicht negativ. Sind sie nicht alle gleich Null, so steht links in (5) eine Funktion $L(|\alpha_{k+1}|)$ von $|\alpha_{k+1}|$, die bei positiven Werten der Veränderlichen fallend alle positiven Werte durchläuft. Daher kann $|\alpha_{k+1}|$ nicht größer sein als die positive Wurzel ξ der Gleichung

$$(6)\quad L(\xi) = \sum_{\nu=1}^{r} \binom{n-k}{\nu} s_\nu(\varphi_1, \ldots, \varphi_k)\, \xi^{-\nu} + t_{k+1} \xi^{-(n-k)} = 1.$$

Wir setzen also φ_{k+1} gleich dieser Wurzel und haben damit die Behauptung (2) für $m = k+1$ bewiesen.

Sollten aber alle Beiwerte in $L(\xi)$ gleich Null sein, so kann (5) nicht bestehen. Dieser Fall kann also nur eintreten, wenn $\alpha_{k+1} = 0$ ist; in ihm setzen wir $\varphi_{k+1} = 0$, so daß auch hier (2) mit $m = k+1$ gilt.

Nun werden die Beiwerte in $L(\xi)$ beliebig klein, wenn $\varphi_1, \ldots, \varphi_k$ und t_{k+1} gegen Null streben, d. h. wenn $t_1, \ldots, t_{k+1}$ gegen Null streben. Ist also $\varepsilon > 0$ gegeben, so wählen wir $t_1, \ldots, t_{k+1}$ so klein, daß $L(\varepsilon) < 1$ ist. Da die Funktion L dauernd abnimmt, kann dann (6) nur für $\xi < \varepsilon$ gelten, d. h. es ist $\varphi_{k+1} < \varepsilon$. Dies gilt auch im Sonderfall des vorigen Absatzes, da dort $\varphi_{k+1} = 0$ gesetzt wurde. Damit ist auch die Behauptung (3) mit $m = k + 1$ bewiesen und so der Beweis des Satzes B vollendet.

Wir stellen noch den Zusammenhang mit dem üblichen Stetigkeitssatze A her. Sei ein Polynom

$$g(y) = y^n + \sum_{\nu=0}^{n-1} b_\nu y^\nu$$

gegeben und $\beta_1, \ldots, \beta_n$ seine Nullstellen. Setzen wir in ihm

$$y = c + x,$$

$$g(y) = x^n + \sum_{\nu=0}^{n-1} \frac{g^{(\nu)}(c)}{\nu!} x^\nu = f(x),$$

so sind die symmetrischen Grundpolynome in den Wurzeln $\alpha_\nu = \beta_\nu - c$ der Gleichung $f(x) = 0$ bis aufs Vorzeichen gleich den Werten $g^{(\nu)}(c)/\nu!$. Nach Satz B(m) sind mindestens m unter den Wurzeln betragsmäßig so klein wie wir wollen, wenn nur die m letzten Beiwerte in $f(x)$ betragsmäßig hinreichend klein sind, d. h. wenn die Ableitungswerte $g(c), g'(c), \ldots, g^{(m-1)}(c)$ hinreichend kleine Beträge haben. So ergibt sich der Satz:

C. *Ein Polynom*

$$g(y) = y^n + \sum_{\nu=0}^{n-1} b_\nu y^\nu$$

hat in beliebiger Nähe eines Wertes c mindestens m Nullstellen, wenn die Ableitungswerte $g(c), g'(c), \ldots, g^{(m-1)}(c)$ hinreichend kleine Beträge haben.

Da die Polynome

$$g^*(y) = y^n + \sum_{\nu=0}^{n-1} b_\nu^* y^\nu$$

mit m-facher Nullstelle bei c durch

$$g^*(c) = g^{*\prime}(c) = \cdots = g^{*(m-1)}(c) = 0$$

gekennzeichnet sind und die Ableitungswerte stetig von den Beiwerten des Polynoms $g(y)$ abhängen, ist der Stetigkeitssatz A im Satze C enthalten.

(Eingegangen am 6. Januar 1942.)

Über die restringierte Limitierung von Doppelfolgen nach den Verfahren von Cesàro, Hölder und Euler-Knopp.

Herrn Konrad Knopp

zum 60. Geburtstag am 22. Juli 1942 gewidmet.

Von

Friedrich Lösch in Rostock.

Die vorliegende Note beschäftigt sich mit Transformationen von (reellen oder komplexen) Doppelfolgen, bei denen mit Hilfe zweier Dreiecksmatrizen

$$(A)\quad \begin{matrix} a_{00} & & & \\ a_{10} & a_{11} & & \\ \cdot & \cdot & \cdot & \\ a_{m0} & a_{m1} & \cdots & a_{mm} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{matrix} \qquad (B)\quad \begin{matrix} b_{00} & & & \\ b_{10} & b_{11} & & \\ \cdot & \cdot & \cdot & \\ b_{m0} & b_{m1} & \cdots & b_{mm} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{matrix},$$

welche den Toeplitzschen Bedingungen

$$\text{(I)}\quad a_{m\mu} \to 0, \qquad b_{m\mu} \to 0 \qquad \text{für festes } \mu \text{ und } m \to \infty,$$

$$\text{(II)}\quad \sum_{\mu=0}^{m} |a_{m\mu}| < K, \qquad \sum_{\mu=0}^{m} |b_{m\mu}| < K \qquad \text{für } m = 0, 1, 2, \ldots,$$

$$\text{(III)}\quad \sum_{\mu=0}^{m} a_{m\mu} \to 1, \qquad \sum_{\mu=0}^{m} b_{m\mu} \to 1 \qquad \text{für } m \to \infty$$

genügen, einer Doppelfolge

$$s_{\mu\nu} \qquad (\mu, \nu = 0, 1, 2, \ldots)$$

eine neue Doppelfolge

$$S_{mn} = \sum_{\mu=0}^{m} \sum_{\nu=0}^{n} a_{m\mu}\, b_{n\nu}\, s_{\mu\nu} \qquad (m, n = 0, 1, 2, \ldots),$$

die „*{A, B}-Transformation*“ von $(s_{\mu\nu})$ zugeordnet wird. Die Klasse dieser Transformationen wird im folgenden kurz die Klasse der „*T-Transformationen*“ genannt.

Eine Doppelfolge $(s_{\mu\nu})$ heißt „*restringiert konvergent*“ gegen den Limes s, in Zeichen

$$[\lim]_{\mu,\nu\to\infty} s_{\mu\nu} = s,$$

wenn für jedes ϑ aus $0 < \vartheta < 1$ diejenigen $s_{\mu\nu}$, deren Indizes den Ungleichungen $\vartheta\nu < \mu < \frac{1}{\vartheta}\nu$ genügen, den einzigen Häufungswert s haben; sie heißt „*restringiert {A, B}-limitierbar*“ zum Wert S, in Zeichen

$$\{A, B\} - [\lim]_{\mu,\nu\to\infty} s_{\mu\nu} = S,$$

wenn für ihre $\{A, B\}$-Transformation (S_{mn}) die Limesrelation

$$[\lim_{m,\,n\to\infty}]\ S_{mn} = S$$

besteht[1]). Ferner soll eine Doppelfolge $(s_{\mu\nu})$ *„restringiert beschränkt"* genannt werden, wenn der größte Häufungswert der Beträge derjenigen $s_{\mu\nu}$, deren Indizes μ, ν den Ungleichungen $\vartheta\,\nu < \mu < \frac{1}{\vartheta}\,\nu$ genügen, für $\vartheta \downarrow 0$ unter einer endlichen Schranke bleibt; entsprechend soll $(s_{\mu\nu})$ *„restringiert $\{A, B\}$-beschränkt"* genannt werden, wenn ihre $\{A, B\}$-Transformation (S_{mn}) restringiert beschränkt ist. Eine restringiert konvergente bzw. restringiert $\{A, B\}$-limitierbare Doppelfolge ist auch restringiert beschränkt bzw. restringiert $\{A, B\}$-beschränkt.

Über die restringierte Limitierung von Doppelfolgen liegen bisher erst wenige Untersuchungen vor, sie beziehen sich sämtlich auf die Frage nach der Gültigkeit des Permanenzsatzes[2]). Dabei zeigt sich bereits, daß die Verhältnisse bei Zugrundelegung restringierter Konvergenz und Limitierbarkeit erheblich komplizierter sind als bei Zugrundelegung gewöhnlicher Konvergenz und Limitierbarkeit. Im Falle gewöhnlicher Konvergenz und Limitierbarkeit gilt der Permanenzsatz, so lange man nach dem Vorgang von Bromwich und Hardy nur beschränkte Doppelfolgen in Betracht zieht („condition of finitude"), für alle T-Transformationen in vollem Umfange, d. h. aus $\lim_{\mu,\,\nu\to\infty} s_{\mu\nu} = s$ folgt stets $\{A, B\}$-$\lim_{\mu,\,\nu\to\infty} s_{\mu\nu} = s$; läßt man beliebige Doppelfolgen zu, so gilt der Permanenzsatz wenigstens noch in der abgeschwächten Form, daß aus der gleichzeitigen Existenz der beiden Limites $\lim_{\mu,\,\nu\to\infty} s_{\mu\nu}$ und $\{A,B\}$-$\lim_{\mu,\,\nu\to\infty} s_{\mu\nu}$ ihre Gleichheit folgt. Demgegenüber lassen sich die bisher für restringierte Konvergenz und Limitierbarkeit erzielten Ergebnisse folgendermaßen zusammenfassen:

1) Schon bei beschränkten Doppelfolgen gilt der Permanenzsatz nicht für alle T-Transformationen, auch nicht in der obengenannten abgeschwächten Form. Es gibt jedoch gewisse T-Transformationen, sie seien weiterhin *„T'-Transformationen"* genannt, für die der Permanenzsatz in vollem Umfange gilt, für die also bei beschränkten Doppelfolgen $(s_{\mu\nu})$ aus $[\lim_{\mu,\,\nu\to\infty}]\ s_{\mu\nu} = s$ stets $\{A, B\}$-$[\lim_{\mu,\,\nu\to\infty}]\ s_{\mu\nu} = s$ folgt. Die Klasse dieser T'-Transformationen läßt sich

[1]) Die Begriffe der restringierten Konvergenz bzw. Limitierbarkeit wurden von C. N. Moore im Zusammenhang mit seinen Untersuchungen über die Summierung Fourierscher Doppelreihen von Funktionen, die längs einer Kurve unstetig sind, eingeführt. Vgl. C. N. Moore, On the summability of the double Fourier's series of discontinuous functions. Math. Annalen **74** (1913), S. 555–572, insbesondere S. 567.

[2]) Für eine zusammenfassende Darstellung vgl. C. N. Moore, Summable series and convergence factors, New York 1938 (American Mathematical Society Colloquium Publications, vol. XXII).

vollständig charakterisieren und man erkennt ohne Mühe, daß ihr die geläufigsten speziellen T-Transformationen, nämlich die *Cesàroschen*, *Hölderschen* und *Euler-Knoppschen Transformationen* ganzer positiver Ordnung angehören[3]).

2) Läßt man beliebige, nicht notwendig beschränkte Doppelfolgen zu, so zeigt sich, daß nun auch die Klasse der T'-Transformationen noch zu weit ist, als daß für sie hinsichtlich restringierter Konvergenz und Limitierbarkeit der Permanenzsatz, auch nur in der genannten abgeschwächten Form, gelten würde. Die dadurch nahegelegte Frage nach den T-Transformationen, für die der Permanenzsatz in der einen oder anderen Form noch gilt, ist bisher nicht vollständig beantwortet worden. Durch den folgenden, für die Betrachtungen dieser Note grundlegenden Satz kennt man jedoch eine Klasse von T-Transformationen, die „*T''-Transformationen*", für welche der Permanenzsatz wenigstens in der abgeschwächten Form gilt[4]):

Hauptsatz: *Eine T-Transformation werde als T''-Transformation bezeichnet, wenn es bei vorgegebenem $\varepsilon > 0$ möglich ist, die Elemente der Matrizen (A) und (B) für jedes feste positive η, das nur kleiner als eine von ε abhängige Zahl $\eta_0(\varepsilon)$ ist, durch Gleichungssysteme*

$$a_{m\mu} = \sum_{\eta m < \varrho \leq m} \alpha_\varrho^{(m,\eta)} a_{\varrho\mu}, \qquad b_{m\mu} = \sum_{\eta m < \varrho \leq m} \beta_\varrho^{(m,\eta)} b_{\varrho\mu} \quad (\mu = 0, 1, \ldots, [\eta m])$$

zu verknüpfen, deren Koeffizienten $\alpha_\varrho^{(m,\eta)}$, $\beta_\varrho^{(m,\eta)}$ den Ungleichungen

$$\text{(IV)} \qquad \sum_{\eta m < \varrho \leq m} |\alpha_\varrho^{(m,\eta)}| < \varepsilon, \qquad \sum_{\eta m < \varrho < m} |\beta_\varrho^{(m,\eta)}| < \varepsilon$$

genügen, sobald m größer als eine von η abhängige Zahl $M(\eta)$ ist.

Definieren die beiden Matrizen (A), (B) eine T''-Transformation, so ist eine restringiert konvergente Doppelfolge $(s_{\mu\nu})$ dann und nur dann auch restringiert $\{A, B\}$-limitierbar, wenn sie restringiert $\{A, B\}$-beschränkt ist. Ist die Doppelfolge $(s_{\mu\nu})$ zugleich restringiert konvergent und restringiert $\{A, B\}$-limitierbar, so gilt

$$\{A, B\}\text{-}\lim_{\mu,\nu\to\infty} s_{\mu\nu} = \lim_{\mu,\nu\to\infty} s_{\mu\nu}.$$

Die Entscheidung, ob eine vorgelegte T-Transformation zur Klasse der T''-Transformationen gehört, so daß sie gewiß den Permanenzsatz in der abgeschwächten Form des vorstehenden Satzes zuläßt, ist in der Regel ziemlich mühsam und erfordert jeweils ein näheres Eingehen auf die spezielle Struktur der betreffenden Matrizen. Es ist das erste Ziel der vorliegenden Untersuchungen, den Nachweis dafür zu erbringen, daß die geläufigsten T-Trans-

---

[3]) F. Lösch, Über restringierte Limitierung von Doppelfolgen. Math. Annalen **110** (1934), S. 33—53, II.

[4]) F. Lösch, a. a. O.[3]), IV. Man erkennt mühelos, daß die dort gegebene Definition der T''-Transformation mit der oben gewählten, etwas einfacheren Definition äquivalent ist.

formationen auch T''-Transformationen sind. Für die *Cesàroschen Transformationen* ganzer positiver Ordnung wurde dies schon früher bewiesen[5]; der Beweis ist in § 1 in einer für das Weitere geeigneten Form wiedergegeben. Anschließend werden in § 2 die *Hölderschen Transformationen* und in § 3 die *Euler-Knoppschen Transformationen* ganzer positiver Ordnung behandelt.

Die weiteren Betrachtungen beziehen sich auf die Frage nach der *Äquivalenz der Cesàroschen und Hölderschen Verfahren* bei restringierter Limitierung von Doppelfolgen. Für einfache Folgen besagt der bekannte *Knopp-Schneesche Satz*, daß die C- und H-Verfahren gleicher Ordnung jeweils äquivalent sind. Für die gewöhnliche Limitierung von Doppelfolgen gilt dies nicht mehr in vollem Umfange. Es folgt jedoch aus der (C, r, s)-Limitierbarkeit (r, s ganz, $\geqq 0$) einer Doppelfolge ihre (H, r, s)-Limitierbarkeit, falls sie schließlich (H, r, s)-beschränkt ist [d. h. falls ihre (H, r, s)-Transformation nach Weglassen einer geeigneten endlichen Anzahl von Anfangszeilen und -spalten beschränkt ist], ebenso umgekehrt; ist die Doppelfolge gleichzeitig (C, r, s)- und (H, r, s)-limitierbar, so stimmen beide Limites überein[6]. In § 4 soll gezeigt werden, daß der entsprechende Satz auch noch für die restringierte C- und H-Limitierung der Doppelfolgen gilt.

§ 1.

Die Cesàroschen Verfahren.

In der üblichen Weise werde als „(C, r, s)-*Transformation*“ für ganze $r, s \geqq 0$ die Transformation bezeichnet, die durch die Matrizen (C_r) und (C_s) festgelegt ist. Dabei verstehen wir unter (C_p) das Schema der C_p-Transformation einfacher Folgen:

$$(C_p): \quad \begin{matrix} \binom{1}{p} & \left\{\binom{p-1}{p-1}\right\} \\ \binom{1}{1+p} & \left\{\binom{p}{p-1}, \quad \binom{p-1}{p-1}\right\} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \binom{1}{m+p} & \left\{\binom{m+p-1}{p-1}, \binom{m+p-2}{p-1}, \ldots, \binom{p-1}{p-1}\right\} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{matrix} \qquad (p = 0, 1, 2, \ldots).$$

[5]) F. Lösch, a. a. O.[3]), V. Für den speziellen Fall des Verfahrens der arithmetischen Mittel hat den Permanenzsatz schon früher S. Bochner, Limitierung mehrfacher Folgen nach dem Verfahren der arithmetischen Mittel. Math. Zeitschr. **35** (1932), S. 122—126 direkt bewiesen.

[6]) C. R. Adams, On summability of double series. Trans. Amer. math. Soc. **34** (1932), S. 215—230 und R. P. Agnew, Amer. J. Math. **54** (1932), S. 648—656.

Wir wollen zeigen, daß für die so definierten (C, r, s)-Transformationen der Permanenzsatz für restringierte Limitierung in der folgenden Form gilt:

Permanenzsatz der C-Verfahren. *Eine restringiert konvergente Doppelfolge* $(s_{\mu\nu})$ *ist dann und nur dann auch restringiert* (C, r, s)*-limitierbar* (r, s ganz, $\geqq 0$), *wenn sie restringiert* (C, r, s)*-beschränkt ist. Ist die Doppelfolge* $(s_{\mu\nu})$ *zugleich restringiert konvergent und restringiert* (C, r, s)*-limitierbar, so gilt*

$$(C, r, s)\text{-}\operatorname*{[lim]}_{\mu,\nu\to\infty} s_{\mu\nu} = \operatorname*{[lim]}_{\mu,\nu\to\infty} s_{\mu\nu}.$$

Beweis. Es ist bekannt, daß die Matrizen (C_p) den Toeplitzschen Bedingungen genügen, so daß die (C, r, s)-Transformationen gewiß zur Klasse der T-Transformationen gehören. Nach dem Hauptsatz genügt es also, zu zeigen, daß es sich genauer um T''-Transformationen handelt, d. h. daß sich die Elemente einer beliebigen Matrix (C_p), $(p = 0, 1, 2, \ldots)$, für kleine positive η und große m in passender Weise durch Gleichungssysteme

$$(1)\qquad \frac{\binom{m+p-1-\mu}{p-1}}{\binom{m+p}{p}} = \sum_{\eta m < \varrho \leqq m} \alpha_\varrho^{(m,\eta)} \frac{\binom{\varrho+p-1-\mu}{p-1}}{\binom{\varrho+p}{p}} \quad (\mu = 0, 1, \ldots, [\eta m])$$

verknüpfen lassen. Bei den zum Nachweis dieser Tatsache erforderlichen Rechnungen werde zur Abkürzung

$$(2)\qquad [\eta m] + 1 = m_\eta$$

gesetzt.

Wir behandeln zunächst die beiden besonders einfach liegenden Fälle $p = 0$ und $p = 1$ und wenden uns dann zu dem allgemeinen Fall $p > 1$:

$p = 0$. In diesem Fall hat man die *identische Transformation*. Wählt man η beliebig aus dem Intervall $0 < \eta < 1$ und dann m so groß, daß $m_\eta < m$ wird, so kann man in (1)

$$\text{alle } \alpha_\varrho^{(m,\eta)} = 0$$

setzen, da in jeder Zeile des Schemas (C_0) nur das letzte Glied $\neq 0$ ist. Die Matrix (C_0) erfüllt also gewiß die im Hauptsatz genannte Bedingung.

$p = 1$. Für $p = 1$ hat man das Schema der *arithmetischen Mittel*. Wir wählen zunächst wieder η beliebig aus $0 < \eta < 1$. Beachtet man, daß in der m_η-ten Zeile des Schemas (C_1) durchweg $\frac{1}{m_\eta+1}$, in der m-ten Zeile durchweg $\frac{1}{m+1}$ steht, so kann man in den Gleichungen (1)

$$\alpha_\varrho^{(m,\eta)} = \begin{cases} \dfrac{m_\eta+1}{m+1} & \text{für } \varrho = m_\eta, \\ 0 & \text{für } \eta m < \varrho \leqq m,\ \varrho \neq m_\eta \end{cases}$$

setzen. Mit dieser Lösung der Gleichungen (1) findet man

$$\sum_{\eta m < \varrho < m} |\alpha_\varrho^{(m,\eta)}| = \frac{m_\eta + 1}{m+1} < \frac{\eta m + 2}{m+1} < \eta + \frac{2}{m}$$

und damit

$$\sum_{\eta m < \varrho \leqq m} |\alpha_\varrho^{(m,\eta)}| < \varepsilon,$$

falls $\eta < \frac{\varepsilon}{3}$ und $m > \frac{1}{\eta}$ gewählt wird. Auch die Matrix (C_1) erfüllt somit die Bedingung (IV) des Hauptsatzes.

$p > 1$. Wir wählen zunächst η beliebig aus $0 < \eta < 1$ und m so groß, daß die Koeffizientenmatrix des Systems (1) mindestens p Zeilen und Spalten aufweist. Die Matrix hat dann den Rang p. Irgendeine ihrer Spalten hat nämlich, horizontal angeordnet, die Form

$$(3) \qquad \frac{\binom{\varrho+p-1}{p-1}}{\binom{\varrho+p}{p}}, \quad \frac{\binom{\varrho+p-2}{p-1}}{\binom{\varrho+p}{p}}, \quad \ldots, \quad \frac{\binom{\varrho+p-1-[\eta m]}{p-1}}{\binom{\varrho+p}{p}}.$$

Subtrahiert man, bei der letzten Zeile beginnend, von jeder Zeile die vorhergehende und wiederholt man diesen Prozeß p-mal, wobei man das erste Mal bis zur 1. Zeile, das zweite Mal bis zur 2. Zeile geht usw., so geht (3) über in

$$(4) \qquad \frac{\binom{\varrho+p-1}{p-1}}{\binom{\varrho+p}{p}}, \quad -\frac{\binom{\varrho+p-2}{p-2}}{\binom{\varrho+p}{p}}, \quad \ldots, \quad (-1)^{p-1}\frac{\binom{\varrho}{0}}{\binom{\varrho+p}{p}}, \quad 0, \ldots, 0.$$

Dies zeigt, daß sowohl die Koeffizienten- als auch die Gleichungsmatrix von (1) höchstens den Rang p hat; die weiteren Betrachtungen ergeben, daß der Rang genau p ist.

Wir fixieren nun eine Lösung der Gleichungen (1), von denen wir nur noch die p ersten, $(\mu = 0, 1, \ldots, p-1)$, in Betracht zu ziehen brauchen, in der Weise, daß wir zunächst willkürlich p Indizes $\varrho_1 < \varrho_2 < \cdots < \varrho_p$ aus $\eta m < \varrho \leqq m$ wählen und

$$(5) \qquad \alpha_\varrho^{(m,\eta)} = 0 \quad \text{für } \eta m < \varrho \leqq m, \ \varrho \neq \varrho_1, \varrho_2, \ldots, \varrho_p$$

setzen. Die restlichen Größen $\alpha_{\varrho_1}^{(m,\eta)}, \alpha_{\varrho_2}^{(m,\eta)}, \ldots, \alpha_{\varrho_p}^{(m,\eta)}$ müssen dann den Gleichungen

$$(6) \qquad \frac{\binom{m+p-1-\mu}{p-1}}{\binom{m+p}{p}} = \alpha_{\varrho_1}^{(m,\eta)}\frac{\binom{\varrho_1+p-1-\mu}{p-1}}{\binom{\varrho_1+p}{p}} + \cdots + \alpha_{\varrho_p}^{(m,\eta)}\frac{\binom{\varrho_p+p-1-\mu}{p-1}}{\binom{\varrho_p+p}{p}}$$

$$(\mu = 0, 1, \ldots, p-1)$$

genügen. Die Determinante dieses Gleichungssystems lautet, wenn man gleich die dem Übergang von (3) zu (4) entsprechende Umformung vornimmt:

$$D_p = \frac{(-1)^{\frac{p(p-1)}{2}}}{\binom{\varrho_1+p}{p}\binom{\varrho_2+p}{p}\cdots\binom{\varrho_p+p}{p}} \begin{vmatrix} \binom{\varrho_1+p-1}{p-1} & \binom{\varrho_2+p-1}{p-1} & \cdots & \binom{\varrho_p+p-1}{p-1} \\ \binom{\varrho_1+p-2}{p-2} & \binom{\varrho_2+p-2}{p-2} & \cdots & \binom{\varrho_p+p-2}{p-2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \binom{\varrho_1}{0} & \binom{\varrho_2}{0} & \cdots & \binom{\varrho_p}{0} \end{vmatrix}.$$

Indem man noch, mit der letzten Zeile beginnend, geeignete Vielfache jeder Zeile von den vorhergehenden Zeilen abzieht, läßt sie sich auf die Form

$$D_p = \frac{(-1)^{\frac{p(p-1)}{2}}}{1!\,2!\ldots(p-1)!} \cdot \frac{V_p(\varrho_1, \varrho_2, \ldots, \varrho_p)}{\binom{\varrho_1+p}{p}\binom{\varrho_2+p}{p}\cdots\binom{\varrho_p+p}{p}} \tag{7}$$

bringen, wo $V_p(\varrho_1, \varrho_2, \ldots, \varrho_p)$ die für die Größen $\varrho_1, \varrho_2, \ldots, \varrho_p$ gebildete Vandermondesche Determinante bedeutet. Für die zu berechnenden Größen $\alpha_{\varrho_\lambda}^{(m,\eta)}$ ergibt sich damit sofort

$$\alpha_{\varrho_\lambda}^{(m,\eta)} = \frac{\binom{\varrho_\lambda+p}{p}}{\binom{m+p}{p}} \cdot \frac{V_p(\varrho_1, \ldots, \varrho_{\lambda-1}, m, \varrho_{\lambda+1}, \ldots, \varrho_p)}{V_p(\varrho_1, \varrho_2, \ldots, \varrho_p)} \qquad (\lambda = 1, 2, \ldots, p). \tag{8}$$

Um nun der Bedingung (IV) des Hauptsatzes zu genügen, wählen wir jedenfalls $\eta < \frac{1}{p}$ und m so groß, daß $p m_\eta < m$ ausfällt. Wir setzen dann

$$\varrho_1 = m_\eta, \quad \varrho_2 = 2 m_\eta, \quad \ldots, \quad \varrho_p = p m_\eta \tag{9}$$

und finden nach (8)

$$\alpha_{\varrho_\lambda}^{(m,\eta)} = \frac{(-1)^{p-\lambda}}{(\lambda-1)!\,(p-\lambda)!} \cdot \frac{(m-m_\eta)(m-2m_\eta)\ldots(m-pm_\eta)}{(m-\lambda m_\eta)\,m_\eta^{p-1}} \cdot \frac{\binom{\lambda m_\eta+p}{p}}{\binom{m+p}{p}} \tag{10}$$

$$(\lambda = 1, 2, \ldots, p).$$

Für $m \to \infty$ strebt $\alpha_{\varrho_\lambda}^{(m,\eta)}$ gegen einen Grenzwert, dessen Betrag für alle $\lambda = 1, 2, \ldots, p$ kleiner als ηp^p ist. Dieser Wert ist $< \frac{\varepsilon}{2p}$, wenn η auf ein

hinreichend kleines Intervall $0 < \eta < \eta_0(\varepsilon)$ beschränkt wird. Bei jeder solchen Wahl von η wird danach für die durch (5) und (10) bestimmten Größen $\alpha_\varrho^{(m,\eta)}$

$$\sum_{\eta m < \varrho \leq m} |\alpha_\varrho^{(m,\eta)}| < \varepsilon \quad \text{für } m > M(\eta).$$

Die Matrix (C_p) erfüllt somit für beliebiges ganzes $p > 1$ die Bedingung (IV) des Hauptsatzes.

§ 2.

Die Hölderschen Verfahren.

Als „(H, r, s)-*Transformation*" werde wie üblich für ganze $r, s \geqq 0$ die Transformation bezeichnet, die durch die Matrizen (H_r) und $(H\ )$ festgelegt ist. Dabei verstehen wir unter (H_p) das bekannte Schema der H_p-Transformation einfacher Folgen. Schreiben wir dasselbe

$$(H_p): \quad \begin{matrix} u_{00}^{(p)} & & & \\ u_{10}^{(p)} & u_{11}^{(p)} & & \\ \cdot & \cdot & \cdot & \\ u_{m0}^{(p)} & u_{m1}^{(p)} & \cdots & u_{mm}^{(p)} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \end{matrix} \qquad (p = 0, 1, 2 \ldots),$$

so bestimmen sich die Elemente $u_{m\mu}^{(p)}$ rekursiv durch die Formeln

$$(1)\quad u_{m\mu}^{(0)} = \begin{cases} 1 & \text{für } \mu = m \\ 0 & \text{für } \mu \neq m \end{cases} \text{ und weiter } u_{m\mu}^{(p)} = \frac{1}{m+1} \sum_{\nu=\mu}^{m} u_{\nu\mu}^{(p-1)} \quad (p = 1, 2, \ldots).$$

Explizit ergibt sich hieraus bei $p > 1$ für $u_{m\mu}^{(p)}$ der Ausdruck

$$(2)\qquad u_{m\mu}^{(p)} = \frac{1}{m+1} \sum_{\nu_{p-1}=\mu+1}^{m+1} \frac{1}{\nu_{p-1}} \sum_{\nu_{p-2}=\mu+1}^{\nu_{p-1}} \frac{1}{\nu_{p-2}} \cdots \sum_{\nu_1=\mu+1}^{\nu_2} \frac{1}{\nu_1}.$$

Wir wollen zeigen, daß für die so definierten (H, r, s)-Transformationen der Permanenzsatz für restringierte Limitierung in derselben Form wie für die (C, r, s)-Transformationen gilt:

Permanenzsatz der H-Verfahren. *Eine restringiert konvergente Doppelfolge* $(s_{\mu\nu})$ *ist dann und nur dann auch restringiert* (H, r, s)*-limitierbar* (r, s ganz, $\geqq 0$), *wenn sie restringiert* (H, r, s)*-beschränkt ist. Ist die Doppel-*

folge $(s_{\mu\nu})$ *zugleich restringiert konvergent und restringiert* (H, r, s)*-limitierbar, so gilt*

$$(H, r, s)\text{-}\,[\lim]_{\mu,\nu\to\infty} s_{\mu\nu} = [\lim]_{\mu,\nu\to\infty} s_{\mu\nu}.$$

Beweis. Da bekannt ist, daß die Matrizen (H_p) den Toeplitzschen Bedingungen genügen, daß also die (H, r, s)-Transformationen gewiß zur Klasse der T-Transformationen gehören, so hat man wie bei den C-Verfahren nur noch zu zeigen, daß es sich genauer um T''-Transformationen handelt, d. h. daß sich die Elemente einer beliebigen Matrix (H_p), $(p = 0, 1, 2, \ldots)$, für kleine positive η und große m in passender Weise durch Gleichungssysteme

$$u_{m\mu}^{(p)} = \sum_{\eta m < \varrho \leqq m} \alpha_{\varrho}^{(m,\eta)} u_{\varrho\mu}^{(p)} \qquad (\mu = 0, 1, \ldots, [\eta m]) \tag{3}$$

verknüpfen lassen.

Wir dürfen $p > 1$ voraussetzen, da die Fälle $p = 0$ und $p = 1$ mit den entsprechenden Fällen der C-Verfahren übereinstimmen. Wählen wir η beliebig aus $0 < \eta < 1$ und dann m so groß, daß die Koeffizientenmatrix des Gleichungssystems (3) mindestens p Zeilen und Spalten aufweist, so hat diese Matrix den Rang p. Irgendeine ihrer Spalten hat nämlich, horizontal angeordnet, die Form

$$u_{\varrho 0}^{(p)},\ u_{\varrho 1}^{(p)},\ \ldots,\ u_{\varrho,[\eta m]}^{(p)}. \tag{4}$$

Subtrahiert man, bei der letzten Zeile beginnend, von jeder Zeile ein geeignetes Vielfaches der vorangehenden Zeile unter Beachtung der für $p \geqq 1$ geltenden Beziehungen

$$u_{\varrho\lambda}^{(p)} = u_{\varrho,\lambda-1}^{(p)} - \frac{1}{\lambda} u_{\varrho,\lambda-1}^{(p-1)} \qquad (\lambda = 1, 2, \ldots, \varrho) \tag{5}$$

[die sich mühelos aus (2) ergeben], so erhält die Spalte (4) nach p-maliger Wiederholung dieses Prozesses, wobei das erste Mal bis zur 1. Zeile, das zweite Mal bis zur 2. Zeile usw. zu gehen ist, die Form

$$u_{\varrho 0}^{(p)},\ -\frac{1}{1!} u_{\varrho 0}^{(p-1)},\ \frac{1}{2!} u_{\varrho 0}^{(p-2)},\ \ldots,\ (-1)^{(p-1)} \frac{1}{(p-1)!} u_{\varrho 0}^{(1)},\ 0, \ldots, 0. \tag{6}$$

Dies zeigt, daß sowohl die Koeffizienten- als auch die Gleichungsmatrix von (3) höchstens den Rang p hat, die weiteren Rechnungen werden ergeben, daß der Rang genau p ist.

Wir suchen nunmehr die Gleichungen (3), von denen wir weiterhin nur die p ersten, $(\mu = 0, 1, \ldots, p-1)$, in Betracht zu ziehen brauchen, in der Weise zu lösen, daß wir zunächst willkürlich p Indizes $\varrho_1 < \varrho_2 < \cdots < \varrho_p$ aus $\eta m < \varrho \leqq m$ wählen und

$$\alpha_{\varrho}^{(m,\eta)} = 0 \quad \text{für } \eta m < \varrho \leqq m, \quad \varrho \neq \varrho_1, \varrho_2, \ldots, \varrho_p \tag{7}$$

setzen, so daß die restlichen Größen $\alpha_{\varrho_1}^{(m,\eta)}, \alpha_{\varrho_2}^{(m,\eta)}, \ldots, \alpha_{\varrho_p}^{(m,\eta)}$ den Gleichungen

$$u_{m\mu}^{(p)} = \alpha_{\varrho_1}^{(m,\eta)} u_{\varrho_1\mu}^{(p)} + \alpha_{\varrho_2}^{(m,\eta)} u_{\varrho_2\mu}^{(p)} + \cdots + \alpha_{\varrho_p}^{(m,\eta)} u_{\varrho_p\mu}^{(p)} \quad (\mu = 0, 1, \ldots, p-1) \tag{8}$$

genügen müssen. Die Determinante dieses Gleichungssystems lautet, wenn gleich die dem Übergang von (4) zu (6) entsprechende Umformung vorgenommen wird,

$$D_p = \frac{(-1)^{\frac{p(p-1)}{2}}}{1!\,2!\cdots(p-1)!} \begin{vmatrix} u_{\varrho_1 0}^{(p)} & u_{\varrho_2 0}^{(p)} & \cdots & u_{\varrho_p 0}^{(p)} \\ u_{\varrho_1 0}^{(p-1)} & u_{\varrho_2 0}^{(p-1)} & \cdots & u_{\varrho_p 0}^{(p-1)} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ u_{\varrho_1 0}^{(1)} & u_{\varrho_2 0}^{(1)} & \cdots & u_{\varrho_p 0}^{(1)} \end{vmatrix}. \tag{9}$$

Setzt man für die Elemente $u_{m\mu}^{(p)}$ die Ausdrücke (2) ein, zieht aus jeder Spalte den vor dem Summenzeichen stehenden gemeinsamen Faktor heraus und subtrahiert sodann die erste Spalte von allen übrigen, so geht D_p durch Entwickeln nach der letzten Zeile in die folgende $(p-1)$-reihige Determinante über

$$D_p = \frac{(-1)^{\frac{(p-1)(p-2)}{2}}}{1!\,2!\ldots(p-1)!} \cdot \frac{\Delta_p}{(\varrho_1+1)(\varrho_2+1)\ldots(\varrho_p+1)}$$

mit

$$\Delta_p = \begin{vmatrix} \cdots & \sum_{\nu_{p-1}=\varrho_1+2}^{\varrho_\lambda+1} \frac{1}{\nu_{p-1}} & \sum_{\nu_{p-2}=1}^{\nu_{p-1}} \frac{1}{\nu_{p-2}} & \cdots & \sum_{\nu_1=1}^{\nu_2} \frac{1}{\nu_1} & \cdots \\ \cdots & & \sum_{\nu_{p-2}=\varrho_1+2}^{\varrho_\lambda+1} \frac{1}{\nu_{p-2}} & \cdots & \sum_{\nu_1=1}^{\nu_2} \frac{1}{\nu_1} & \cdots \\ \cdots & & & & \sum_{\nu_1=\varrho_1+2}^{\varrho_\lambda+1} \frac{1}{\nu_1} & \cdots \end{vmatrix} \quad (\lambda = 2, \ldots, p).$$

Die in einer beliebigen Spalte stehenden Elemente können wir nun, von unten nach oben fortschreitend, durch die folgenden Formeln umschreiben:

$$\sum_{\nu_1=\varrho_1+2}^{\varrho_\lambda+1}\frac{1}{\nu_1} = \sum_{\nu_1=\varrho_1+2}^{\varrho_\lambda+1}\frac{1}{\nu_1},$$

$$\sum_{\nu_2=\varrho_1+2}^{\varrho_\lambda+1}\frac{1}{\nu_2}\sum_{\nu_1=1}^{\nu_2}\frac{1}{\nu_1} = \sum_{\nu_2=\varrho_1+2}^{\varrho_\lambda+1}\frac{1}{\nu_2}\cdot\sum_{\nu_1=1}^{\varrho_1+1}\frac{1}{\nu_1}+\sum_{\nu_2=\varrho_1+2}^{\varrho_\lambda+1}\frac{1}{\nu_2}\sum_{\nu_1=\varrho_1+2}^{\nu_2}\frac{1}{\nu_1},$$

$$\sum_{\nu_3=\varrho_1+2}^{\varrho_\lambda+1}\frac{1}{\nu_3}\sum_{\nu_2=1}^{\nu_3}\frac{1}{\nu_2}\sum_{\nu_1=1}^{\nu_2}\frac{1}{\nu_1} = \sum_{\nu_3=\varrho_1+2}^{\varrho_\lambda+1}\frac{1}{\nu_3}\cdot\sum_{\nu_2=1}^{\varrho_1+1}\frac{1}{\nu_2}\sum_{\nu_1=1}^{\nu_2}\frac{1}{\nu_1}+\sum_{\nu_3=\varrho_1+2}^{\varrho_\lambda+1}\frac{1}{\nu_3}\sum_{\nu_2=\varrho_1+2}^{\nu_3}\frac{1}{\nu_2}\cdot\sum_{\nu_1=1}^{\varrho_1+1}\frac{1}{\nu_1}+\sum_{\nu_3=\varrho_1+2}^{\varrho_\lambda+1}\frac{1}{\nu_3}\sum_{\nu_2=\varrho_1+2}^{\nu_3}\frac{1}{\nu_2}\sum_{\nu_1=\varrho_1+2}^{\nu_2}\frac{1}{\nu_1},$$

. . . . . .

Damit läßt sich die Determinante Δ_p durch wiederholte Zeilensubtraktion schließlich in die Form setzen

$$\Delta_p = \begin{vmatrix} \cdots & \sum\limits_{\nu_{p-1}=\varrho_1+2}^{\varrho_\lambda+1}\frac{1}{\nu_{p-1}}\sum\limits_{\nu_{p-2}=\varrho_1+2}^{\nu_{p-1}}\frac{1}{\nu_{p-2}}\cdots\sum\limits_{\nu_1=\varrho_1+2}^{\nu_2}\frac{1}{\nu_1}\cdots \\ \cdots & \sum\limits_{\nu_{p-2}=\varrho_1+2}^{\varrho_\lambda+1}\frac{1}{\nu_{p-2}}\cdots\sum\limits_{\nu_1=\varrho_1+2}^{\nu_2}\frac{1}{\nu_1}\cdots \\ \cdots & \sum\limits_{\nu_1=\varrho_1+2}^{\varrho_\lambda+1}\frac{1}{\nu_1}\cdots \end{vmatrix} \quad (\lambda=2,3,\ldots,p).$$

Die nunmehr auftretenden Ausdrücke lassen sich in bequemer Weise für große $\varrho_1, \varrho_2, \ldots, \varrho_p$ asymptotisch abschätzen. Man hat nämlich, wieder von unten nach oben fortschreitend, für beliebiges $\varrho > \varrho_1$ mit $\varrho = O(\varrho_1)$ nacheinander

$$\sum_{\nu_1=\varrho_1+2}^{\varrho+1}\frac{1}{\nu_1} = \int_{\varrho_1+2}^{\varrho+1}\frac{dx}{x}+O\left(\frac{1}{\varrho_1}\right) = \frac{1}{1!}[\ln\varrho-\ln\varrho_1]+O\left(\frac{1}{\varrho_1}\right),$$

$$\sum_{\nu_2=\varrho_1+2}^{\varrho+1}\frac{1}{\nu_2}\sum_{\nu_1=\varrho_1+2}^{\nu_2}\frac{1}{\nu_1} = \int_{\varrho_1+2}^{\varrho+1}[\ln x-\ln\varrho_1]\frac{dx}{x}+O\left(\frac{\ln\varrho}{\varrho_1}\right)$$

$$= \frac{1}{2!}[\ln\varrho-\ln\varrho_1]^2+O\left(\frac{\ln\varrho_1}{\varrho_1}\right)$$

usw.

Damit sind wir in der Lage, die Auflösung des Gleichungssystems (8) vollends in übersichtlicher Weise durchzuführen. Wir setzen $\eta = \vartheta^p$ und verfügen über die bisher willkürlich angenommenen Indizes $\varrho_1, \varrho_2, \ldots, \varrho_p$ in der Weise, daß wir

$$\varrho_1 = [\vartheta^p m] + 1, \quad \varrho_2 = [\vartheta^{p-1} m] + 1, \quad \ldots, \quad \varrho_p = [\vartheta m] + 1$$

wählen, wobei m so groß sei, daß diese Werte voneinander verschieden sind. Die Determinante Δ_p erhält dann den Wert

$$\Delta_p = \begin{vmatrix} \cdots & \frac{1}{(p-1)!}\{\ln \vartheta^{p-\lambda} m - \ln \vartheta^p m\}^{p-1} + O\left(\frac{\ln^{p-2} m}{m}\right) & \cdots \\ \cdots & \frac{1}{(p-2)!}\{\ln \vartheta^{p-\lambda} m - \ln \vartheta^p m\}^{p-2} + O\left(\frac{\ln^{p-3} m}{m}\right) & \cdots \\ \cdots & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & \cdots \\ \cdots & \frac{1}{1!}\{\ln \vartheta^{p-\lambda} m - \ln \vartheta^p m\} + O\left(\frac{1}{m}\right) & \cdots \end{vmatrix} \quad (\lambda = 1, 2, \ldots, p-1)$$

$$= \frac{(-1)^{\frac{(p-1)(p-2)}{2}}}{1!\,2!\ldots(p-1)!}\{\ln \vartheta\}^{\frac{p(p-1)}{2}} V_p(0, 1, 2, \ldots, p-1) + O\left(\frac{\ln^{p-2} m}{m}\right),$$

wo $V_p(0, 1, \ldots, p-1)$ die für $0, 1, \ldots, p-1$ gebildete Vandermondesche Determinante bedeutet. Um nun die gesuchten Größen $\alpha_{\varrho_\lambda}^{(m,\eta)}$ zu erhalten, hat man nur zu beachten, daß die Zählerdeterminante jeweils aus D_p entsteht, indem man $\varrho_\lambda = m$ an Stelle von $\varrho_\lambda = [\vartheta^{p+1-\lambda} m] + 1$ einführt. Damit ergibt sich

$$\alpha_{\varrho_\lambda}^{(m,\eta)} = \frac{[\vartheta^{p+1-\lambda} m] + 2}{m+1}\left\{\frac{V_p(0, \ldots, \lambda-2, p, \lambda, \ldots, p-1)}{V_p(0, 1, \ldots, p-1)} + O\left(\frac{\ln^{p-2} m}{m}\right)\right\}.$$

Man erkennt, daß dieser Wert für $m \to \infty$ gegen

$$\frac{V_p(0, \ldots, \lambda-2, p, \lambda, \ldots, p-1)}{V_p(0, 1, \ldots, p-1)}\,\vartheta^{p+1-\lambda} \qquad (\lambda = 1, 2, \ldots, p)$$

strebt, einen Wert, der bei vorgegebenem $\varepsilon > 0$ unter $\frac{\varepsilon}{2p}$ sinkt, falls nur ϑ, d. h. η hinreichend klein gewählt ist. Hieraus folgt, daß für $\eta < \eta_0(\varepsilon)$

$$\sum_{\eta m < \varrho < m} |\alpha_\varrho^{(m,\eta)}| < \varepsilon \quad \text{für } m > M(\eta)$$

gilt. Die Matrix (H_p) erfüllt somit für beliebiges ganzes $p > 1$ die Bedingung (IV) des Hauptsatzes.

§ 3.

Die Euler-Knoppschen Verfahren.

Wir bezeichnen als „(E, r, s)-*Transformation*“ für ganze $r, s \geqq 0$ die Transformation, die durch die Matrizen (E_r) und (E_s) festgelegt ist. Dabei verstehen wir unter (E_p) das bekannte Schema der E_p-Transformation einfacher Folgen, das die Form hat:

$$(E_p): \quad \begin{array}{l} \frac{1}{(q+1)^0} \left\{\binom{0}{0}\right\} \\ \frac{1}{(q+1)^1} \left\{\binom{1}{0} q, \binom{1}{1}\right\} \\ \cdots\cdots\cdots \\ \frac{1}{(q+1)^m} \left\{\binom{m}{0} q^m, \binom{m}{1} q^{m-1}, \ldots, \binom{m}{m}\right\} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{array} \qquad \begin{pmatrix} q = 2^p - 1 \\ p = 0, 1, 2, \ldots \end{pmatrix}.$$

Wir wollen zeigen, daß auch für die so definierten E-Transformationen der Permanenzsatz in derselben Form wie für die C- und H-Verfahren gilt:

Permanenzsatz der E-Verfahren. *Eine restringiert konvergente Doppelfolge $(s_{\mu\nu})$ ist dann und nur dann auch restringiert (E, r, s)-limitierbar (r, s ganz, $\geqq 0$), wenn sie restringiert (E, r, s)-beschränkt ist. Ist die Doppelfolge $(s_{\mu\nu})$ zugleich restringiert konvergent und restringiert (E, r, s)-limitierbar, so gilt*

$$(E, r, s)\text{-}\lim_{\mu, \nu \to \infty} s_{\mu\nu} = \lim_{\mu, \nu \to \infty} s_{\mu\nu}.$$

Beweis. Da bekannt ist, daß die Matrizen (E_p) den Toeplitzschen Bedingungen genügen, daß also die (E, r, s)-Transformationen zur Klasse der T-Transformationen gehören, so ist auch hier wieder nur noch zu zeigen, daß es sich genauer um T''-Transformationen handelt, d. h. daß sich die Elemente einer beliebigen Matrix (E_p), $(p = 0, 1, 2, \ldots)$, für kleine positive η und große m in passender Weise durch Gleichungssysteme

$$(1) \qquad \frac{q^{m-\mu}}{(q+1)^m}\binom{m}{\mu} = \sum_{\eta m < \varrho \leqq m} \alpha_{\varrho}^{(m,\eta)} \frac{q^{\varrho-\mu}}{(q+1)^{\varrho}}\binom{\varrho}{\mu} \qquad (\mu = 0, 1, \ldots, [\eta m])$$

verknüpfen lassen. Da (E_0) wieder die identische Transformation liefert, können wir $p > 0$, also auch $q > 0$, voraussetzen. Bei der Durchführung des Beweises empfiehlt es sich, die Abkürzung

$$(2) \qquad [\eta m] + 1 = m_{\eta}$$

zu verwenden.

Wir wählen zunächst $\eta < \frac{1}{2}$ und m so groß, daß $2 m_\eta < m$ ausfällt. Für ein solches η und m genügen wir den Gleichungen (1), indem wir

$$(3) \qquad \alpha_\varrho^{(m,\eta)} = 0 \quad \text{für } \eta m < \varrho \leqq m,\ \varrho \neq m_\eta, m_\eta + 1, \ldots, 2 m_\eta$$

wählen, während die übrigen $\alpha_\varrho^{(m,\eta)}$ die Gleichungen

$$(4) \qquad \frac{q^{m-\mu}}{(q+1)^m} \binom{m}{\mu} = \sum_{\varrho = m_\eta}^{2 m_\eta} \alpha_\varrho^{(m,\eta)} \frac{q^{\varrho-\mu}}{(q+1)^\varrho} \binom{\varrho}{\mu} \quad (\mu = 0, 1, \ldots, m_\eta)$$

erfüllen sollen. Das Gleichungssystem (4) läßt sich durch Einführung der Abkürzung

$$v = \frac{q}{q+1}$$

umschreiben in

$$(5) \qquad v^{m-m_\eta} \binom{m}{\mu} = \alpha_{m_\eta}^{(m,\eta)} \binom{m_\eta}{\mu} + \alpha_{m_\eta+1}^{(m,\eta)} \binom{m_\eta+1}{\mu} v + \ldots + \alpha_{2 m_\eta}^{(m,\eta)} \binom{2 m_\eta}{\mu} v^{m_\eta}$$
$$(\mu = 0, 1, \ldots, m_\eta).$$

Die Determinante dieses Gleichungssystems lautet

$$D = v^{\frac{m_\eta (m_\eta+1)}{2}} \begin{vmatrix} \binom{m_\eta}{0} & \binom{m_\eta+1}{0} & \cdots & \binom{2 m_\eta}{0} \\ \binom{m_\eta}{1} & \binom{m_\eta+1}{1} & \cdots & \binom{2 m_\eta}{1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \binom{m_\eta}{m_\eta} & \binom{m_\eta+1}{m_\eta} & \cdots & \binom{2 m_\eta}{m_\eta} \end{vmatrix}.$$

Diese Determinante vereinfacht sich, wenn mit der 1. Zeile beginnend jede Zeile von der nachfolgenden subtrahiert wird. Führt man diesen Prozeß wiederholt durch, so erhält man nach m_η Schritten eine Determinante, deren sämtliche unterhalb der Hauptdiagonale stehenden Elemente verschwinden, während die in der Hauptdiagonale stehenden Elemente den Wert 1 haben; es ist also

$$D = v^{\frac{m_\eta (m_\eta+1)}{2}} \neq 0.$$

Die bei der Auflösung des Gleichungssystems (5) auftretenden Zählerdeterminanten lassen sich in derselben Weise reduzieren und man erhält so die Werte:

$$(6) \qquad \alpha_{m_\eta+\lambda}^{(m,\eta)} = (-1)^{m_\eta+\lambda} \binom{m-m_\eta}{\lambda} \binom{m-m_\eta-1-\lambda}{m_\eta-\lambda} v^{m-m_\eta-\lambda}$$
$$(\lambda = 0, 1, \ldots, m_\eta).$$

Für die durch (3) und (6) bestimmte Lösung der Gleichungen (1) wird

$$\sum_{\eta\, m \leq \varrho \leq m} |\alpha_\varrho^{(m,\eta)}| = \sum_{\lambda=0}^{m_\eta} \binom{m-m_\eta}{\lambda} \binom{m-m_\eta-1-\lambda}{m_\eta-\lambda} v^{m-m_\eta-\lambda}$$

$$= (m-2m_\eta)\binom{m-m_\eta}{m_\eta} \sum_{\lambda=0}^{m_\eta} \frac{\binom{m_\eta}{\lambda}}{m-m_\eta-\lambda} v^{m-m_\eta-\lambda}$$

$$= (m-2m_\eta)\binom{m-m_\eta}{m_\eta} \int_0^v v^{m-2m_\eta-1}(1+v)^{m_\eta}\, dv,$$

also

$$(7) \qquad \sum_{\eta\, m \leq \varrho < m} |\alpha_\varrho^{(m,\eta)}| \leqq (m-2m_\eta)\binom{m-m_\eta}{m_\eta} v^{m-2m_\eta}(1+v)^{m_\eta}.$$

Durch Anwendung der Stirlingschen Formel folgt hieraus weiter

$$(8) \qquad \sum_{\eta\, m \leq \varrho \leq m} |\alpha_\varrho^{(m,\eta)}| \leqq \text{Konst.}\, m\sqrt{m} \left(\frac{v^{1-2\eta-\frac{2}{m}}(1+v)^{\eta+\frac{1}{m}}}{\eta^{\eta+\frac{1}{m}}\left(1-2\eta-\frac{2}{m}\right)^{1-2\eta}} \right)^m.$$

Bei festem η strebt der Ausdruck in der Klammer für $m \to \infty$ gegen

$$\frac{v^{1-2\eta}(1+v)^{\eta}}{\eta^{\eta}(1-2\eta)^{1-2\eta}}.$$

Dieser Limes ist kleiner als Eins, wenn η auf ein genügend kleines Intervall $0 < \eta < \eta_0$ beschränkt wird. Hieraus folgt, daß für ein solches, fest gewähltes η der Ausdruck in der Klammer von (8) selbst kleiner als eine Zahl $v_0 < 1$ ist, falls nur m genügend groß angenommen wird. Für ein festes η aus $0 < \eta < \eta_0$ gilt also bei hinreichend großem m

$$\sum_{\eta\, m \leq \varrho \leq m} |\alpha_\varrho^{(m,\eta)}| \leqq \text{Konst.}\, m\sqrt{m}\, v_0^m.$$

Hieraus schließt man endlich, daß es bei vorgegebenem $\varepsilon > 0$ zu jedem η aus $0 < \eta < \eta_0$ eine Zahl $M(\eta)$ gibt derart, daß

$$\sum_{\eta\, m \leq \varrho < m} |\alpha_\varrho^{(m,\eta)}| < \varepsilon \quad \text{für} \quad m > M(\eta)$$

ausfällt. Die Matrix (E_μ) erfüllt somit für beliebiges ganzes $\mu > 0$ die Bedingung (IV) des Hauptsatzes.

§ 4.

Die Äquivalenz der Cesàroschen und Hölderschen Verfahren.

Wir wenden uns nun noch zur Untersuchung der Frage, wie weit sich der Knopp-Schneesche Satz von der Äquivalenz der C- und H-Verfahren auf die restringierte Limitierung von Doppelfolgen überträgt. Wie einfache Beispiele zeigen, kann der Satz jedenfalls nicht in der allgemeinen Form gelten, daß für ganzes $r, s \geqq 0$ aus der restringierten (C, r, s)-Limitierbarkeit einer Doppelfolge stets ihre restringierte (H, r, s)-Limitierbarkeit zu demselben Limes folgt und umgekehrt:

1) Die Doppelfolge $(s_{\mu\nu})$ mit

$$s_{0\nu} = 2\{(\nu+1)^2 - \nu^2\}, \quad s_{1\nu} = -4\{(\nu+1)^2 - \nu^2\}, \quad s_{2\nu} = 2\{(\nu+1)^2 - \nu^2\},$$
$$s_{\mu\nu} = 0 \quad \text{für} \quad \mu \geqq 3$$

besitzt den Limes 0. Ihre arithmetischen Mittel $(m_{\mu\nu})$ sind

$$m_{0\nu} = 2(\nu+1), \quad m_{1\nu} = -(\nu+1), \quad m_{\mu\nu} = 0 \text{ für } \mu \geqq 2,$$

sie haben also ebenfalls den Limes 0. Dasselbe gilt schließlich von ihrer $(C, 2, 2)$-Transformation $(c_{\mu\nu}^{(2,2)})$, denn man sieht ohne Mühe, daß

$$c_{\mu\nu}^{(2,2)} = 0 \quad \text{für} \quad \mu \geqq 1$$

gilt. Trotzdem danach die Doppelfolge $(s_{\mu\nu})$ im gewöhnlichen Sinne konvergent, $(C, 1, 1) = (H, 1, 1)$-limitierbar und $(C, 2, 2)$-limitierbar zu demselben Wert 0 ist, ist sie nicht einmal restringiert $(H, 2, 2)$-limitierbar. Für ihre $(H, 2, 2)$-Transformation $(h_{\mu\nu}^{(2,2)})$ gilt nämlich speziell

$$h_{\mu\mu}^{(2,2)} = \frac{1}{2}\,\frac{\mu+2}{\mu+1} \qquad (\mu = 1, 2, \ldots),$$

sie kann also nicht den Limes 0 im restringierten Sinne besitzen und ein anderer Limes kommt nach dem Permanenzsatz des § 2 nicht in Frage.

2) Die Doppelfolge $(s_{\mu\nu})$ mit

$$s_{0\nu} = (\nu+1)^3 - \nu^3, \quad s_{1\nu} = -3\{(\nu+1)^3 - \nu^3\}, \quad s_{2\nu} = 2\{(\nu+1)^3 - \nu^3\},$$
$$s_{\mu\nu} = 0 \quad \text{für} \quad \mu \geqq 3,$$

besitzt den Limes 0. Dasselbe gilt für ihre arithmetischen Mittel $(m_{\mu\nu})$, die die Werte

$$m_{0\nu} = (\nu+1)^2, \quad m_{1\nu} = -(\nu+1)^2, \quad m_{\mu\nu} = 0 \text{ für } \mu \geqq 2$$

besitzen, sowie für ihre $(H, 2, 2)$-Transformation $(h_{\mu\nu}^{(2,2)})$, denn wie man mühelos nachprüft, gilt

$$h_{\mu\nu}^{(2,2)} = 0 \quad \text{für} \quad \mu \geqq 1.$$

Trotzdem danach die Doppelfolge $(s_{\mu\nu})$ im gewöhnlichen Sinne konvergent, $(C, 1, 1) = (H, 1, 1)$-limitierbar und $(H, 2, 2)$-limitierbar zu demselben Wert 0

ist, ist sie nicht einmal restringiert $(C, 2, 2)$-limitierbar. Für ihre $(C, 2, 2)$-Transformation $(c_{\mu\nu}^{(2,2)})$ gilt nämlich speziell

$$c_{\mu\mu}^{(2,2)} = -\frac{1}{\binom{\mu+2}{2}^2}\left[1^3 + 2^3 + \cdots + (\mu+1)^3\right] \quad (\mu = 1, 2, \ldots),$$

sie kann also nicht den Limes 0 im restringierten Sinne besitzen und ein anderer Limes kommt nach dem Permanenzsatz des § 1 nicht in Frage.

Wenn danach die C- und H-Verfahren für restringierte Limitierung von Doppelfolgen auch nicht in vollem Umfange äquivalent sein können, so besagt doch der nachfolgende Satz, daß die Äquivalenz wenigstens in demselben abgeschwächten Sinne wie bei gewöhnlicher Limitierung von Doppelfolgen besteht:

Äquivalenzsatz der C- und H-Verfahren. *Eine für ganzes $r, s \geqq 0$ restringiert (C, r, s)-limitierbare Doppelfolge $(s_{\mu\nu})$ ist dann und nur dann auch restringiert (H, r, s)-limitierbar, wenn sie restringiert (H, r, s)-beschränkt ist, entsprechend umgekehrt. Ist die Doppelfolge $(s_{\mu\nu})$ zugleich restringiert (C, r, s)- und (H, r, s)-limitierbar,* so gilt

$$(C, r, s)\text{-}\lim_{\mu,\nu\to\infty} s_{\mu\nu} = (H, r, s)\text{-}\lim_{\mu,\nu\to\infty} s_{\mu\nu}.$$

Beweis. Beim Beweis gehen wir davon aus, daß sich jeweils die (C, r, s)-Transformation $(c_{\mu\nu}^{(r,s)})$ und die (H, r, s)-Transformation $(h_{\mu\nu}^{(r,s)})$ einer Doppelfolge $(s_{\mu\nu})$ durch T-Transformationen ineinander überführen lassen[7]: Der Übergang von der Folge $(c_{\mu\nu}^{(r,s)})$ zu der Folge $(h_{\mu\nu}^{(r,s)})$ vollzieht sich durch zwei Dreiecksmatrizen $A = (C \to H)_r$ und $B = (C \to H)_s$, wobei allgemein für ganzes $p \geqq 1$ die Matrix $(C \to H)_p$, welche die C_p-Transformation einer einfachen Folge in ihre H_p-Transformation überführt, eine lineare Kombination der Matrizen $(H_0), (H_1), \ldots, (H_{p-1})$ darstellt:

$$(1) \qquad (C \to H)_p = \gamma_0^{(p)}(H_0) + \gamma_1^{(p)}(H_1) + \cdots + \gamma_{p-1}^{(p)}(H_{p-1}).$$

Die Koeffizienten γ bestimmen sich dabei aus der Rekursionsformel

$$(2) \qquad \gamma_0^{(p)} = \frac{1}{p!}, \qquad \gamma_\lambda^{(p)} = \frac{\gamma_\lambda^{(p-1)} + (p-1)\,\gamma_{\lambda-1}^{(p-1)}}{p} \qquad (\lambda = 1, 2, \ldots, p-1)$$

(falls man sich jeweils $\gamma_p^{(p)} = 0$ gesetzt denkt); sie zeigt, daß alle Größen $\gamma_\lambda^{(p)}$, $(\lambda = 0, 1, \ldots, p-1)$, positiv sind. Umgekehrt vollzieht sich auch der Übergang von der Folge $(h_{\mu\nu}^{(r,s)})$ zu der Folge $(c_{\mu\nu}^{(r,s)})$ durch zwei Dreiecksmatrizen $(A) = (H \to C)_r$ und $(B) = (H \to C)_s$, wobei nun allgemein für ganzes $p \geqq 1$ die Matrix $(H \to C)_p$, welche die H_p-Transformation einer einfachen Folge

[7]) Vgl. V. Garten, Über den Vergleich der Cesàroschen und Hölderschen Mittelbildungen. Math. Zeitschr. **47** (1940), S. 111–124 sowie die dort zitierte Literatur.

in ihre C_p-Transformation überführt, eine lineare Kombination der Matrizen $(C_0), (C_1), \ldots, (C_p)$ darstellt:

$$(H \to C)_p = \delta_0^{(p)}(C_0) + \delta_1^{(p)}(C_1) + \cdots + \delta_p^{(p)}(C_p). \tag{3}$$

Die Koeffizienten δ bestimmen sich dabei jeweils aus den Gleichungen

$$\delta_0^{(p)} = p!, \qquad \frac{(-1)^{\varkappa+1}}{p!} \sum_{\lambda=\varkappa+1}^{p} \lambda \binom{\lambda-1}{\varkappa} \delta_\lambda^{(p)} = d_{p-1-\varkappa}^{(p)} \tag{4}$$

$$(\varkappa = 0, 1, \ldots, p-1),$$

wo die Größen d durch die Formel

$$d_\lambda^{(p)} = (-1)^\lambda \binom{p-1}{\lambda} \frac{(p-\lambda-1)^p}{(p-1)!} \qquad (\lambda = 0, 1, \ldots, p-1) \tag{5}$$

erklärt sind, so daß $d_{p-1}^{(p)} = 0$, dagegen $d_\lambda^{(p)} \neq 0$ für $\lambda = 0, 1, \ldots, p-2$ gilt. Sowohl die Matrix $(C \to H)_p$ als auch die Matrix $(H \to C)_p$ genügt den Toeplitzschen Bedingungen, da sie nach dem Knopp-Schneeschen Satz jede konvergente (einfache) Folge in eine zum gleichen Wert konvergente Folge überführen. Es lassen sich also in der Tat $(c_{\mu\nu}^{r,s})$ und $(h_{\mu\nu}^{r,s})$ durch T-Transformationen ineinander überführen.

Nach dem Hauptsatz ist für den Beweis des Äquivalenzsatzes somit noch zu zeigen, daß diese T-Transformationen genauer der Klasse der T''-Transformationen angehören, daß also die Matrizen $(C \to H)_p$ und $(H \to C)_p$ der dafür charakteristischen zusätzlichen Bedingung (IV) genügen. Diesen Nachweis erbringen wir nacheinander für die beiden Matrizen:

1) $(C \to H)_p$. Da die Matrix für $p = 0$ und $p = 1$ die identische Transformation darstellt, dürfen wir $p > 1$ voraussetzen. Bezeichnen wir dann die Elemente der Matrix mit

$$x_{m,\mu}^{(p)} \qquad (\mu = 0, 1, \ldots, m; \; m = 0, 1, 2, \ldots),$$

so genügt es zu zeigen, daß sich dieselben für kleine positive η und große m in passender Weise durch Gleichungssysteme

$$x_{m,\mu}^{(p)} = \sum_{\eta m < \varrho < m} \alpha_\varrho^{(m,\eta)} x_{\varrho,\mu}^{(p)} \qquad (\mu = 0, 1, \ldots, [\eta m]) \tag{6}$$

verknüpfen lassen.

Wählen wir η beliebig aus $0 < \eta < 1$ und dann m so groß, daß die Koeffizientenmatrix des Gleichungssystems (6) mindestens $p-1$ Zeilen und Spalten aufweist, so hat diese Matrix den Rang $p-1$. Irgendeine ihrer Spalten hat nämlich, horizontal angeordnet, zufolge (1) die Form

$$x_{\varrho,0}^{(p)} = \sum_{\lambda=0}^{p-1} \gamma_\lambda^{(p)} u_{\varrho,0}^{(\lambda)}, \quad x_{\varrho,1}^{(p)} = \sum_{\lambda=0}^{p-1} \gamma_\lambda^{(p)} u_{\varrho,1}^{(\lambda)}, \ \ldots, \ x_{\varrho,[\eta m]}^{(p)} = \sum_{\lambda=0}^{p-1} \gamma_\lambda^{(p)} u_{\varrho,[\eta m]}^{(\lambda)}, \tag{7}$$

wo die Größen $u_{m,\mu}^{(\eta)}$ die betreffenden Elemente der Matrix (H_η) bedeuten (vgl. § 2). Beachtet man, daß

$$u_{m,\mu}^{(0)} = 0 \quad \text{für} \quad \mu < m$$

gilt, so läßt sich die Matrix mit Hilfe der Gleichungen (5) des § 2 in einfacher Weise umformen. Subtrahiert man nämlich, bei der letzten Zeile beginnend, von jeder Zeile die mit einem entsprechenden Faktor versehene vorangehende Zeile und wiederholt dieses Verfahren $(p-1)$-mal, wobei man das erste Mal bis zur 1. Zeile, das zweite Mal bis zur 2. Zeile und das $(p-1)$-te Mal bis zur $(p-1)$-ten Zeile geht, so erhält die Spalte (7), wieder horizontal angeordnet, die Form

$$(8)\qquad \sum_{\lambda=1}^{p-1}\gamma_\lambda^{(p)}u_{\varrho 0}^{(\lambda)},\quad -\frac{1}{1!}\sum_{\lambda=2}^{p-1}\gamma_\lambda^{(p)}u_{\varrho 0}^{(\lambda-1)},\quad \frac{1}{2!}\sum_{\lambda=3}^{p-1}\gamma_\lambda^{(p)}u_{\varrho 0}^{(\lambda-2)},\quad \ldots,$$
$$\frac{(-1)^{p-2}}{(p-2)!}\gamma_{p-1}^{(p)}u_{\varrho 0}^{(1)},\ 0,\ \ldots,\ 0.$$

Dies zeigt, daß sowohl die Koeffizienten- als auch die Gleichungsmatrix von (6) höchstens den Rang $p-1$ haben; daß sie genau den Rang $p-1$ haben, geht aus den weiteren Rechnungen hervor.

Wir lösen nun die Gleichungen (6), von denen wir weiterhin nur die $p-1$ ersten, $(\mu=0,1,\ldots,p-2)$, in Betracht zu ziehen brauchen, in der Weise, daß wir zunächst willkürlich $p-1$ Indizes $\varrho_1<\varrho_2<\cdots<\varrho_{p-1}$ aus $\eta m<\varrho\leqq m$ wählen und

$$(9)\qquad \alpha_\varrho^{(m,\eta)}=0\quad\text{für}\quad \eta m<\varrho\leqq m,\quad \varrho\neq\varrho_1,\varrho_2,\ldots,\varrho_{p-1}$$

setzen, so daß die restlichen Größen $\alpha_{\varrho_1}^{(m,\eta)}$, $\alpha_{\varrho_2}^{(m,\eta)}$, $\ldots$, $\alpha_{\varrho_{p-1}}^{(m,\eta)}$ den Gleichungen

$$(10)\qquad x_{m\mu}^{(p)}=\alpha_{\varrho_1}^{(m,\eta)}x_{\varrho_1\mu}^{(p)}+\alpha_{\varrho_2}^{(m,\eta)}x_{\varrho_2\mu}^{(p)}+\cdots+\alpha_{\varrho_{p-1}}^{(m,\eta)}x_{\varrho_{p-1}\mu}^{(p)}$$
$$(\mu=0,1,\ldots,p-2)$$

genügen müssen. Die Determinante dieses Gleichungssystems lautet, wenn gleich die dem Übergang von (7) zu (8) entsprechende Umformung vorgenommen und dann noch, mit der letzten Zeile beginnend, ein geeignetes Vielfaches jeder Zeile von den vorhergehenden abgezogen wird, einfach

$$\frac{(-1)^{\frac{(p-1)(p-2)}{2}}}{1!\,2!\ldots(p-2)!}\{\gamma_{p-1}^{(p)}\}^{p-1}\begin{vmatrix} u_{\varrho_1 0}^{(p-1)} & u_{\varrho_2 0}^{(p-1)} & \cdots & u_{\varrho_{p-1}0}^{(p-1)}\\ u_{\varrho_1 0}^{(p-2)} & u_{\varrho_2 0}^{(p-2)} & \cdots & u_{\varrho_{p-1}0}^{(p-2)}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ u_{\varrho_1 0}^{(1)} & u_{\varrho_2 0}^{(1)} & \cdots & u_{\varrho_{p-1}0}^{(1)}\end{vmatrix};$$

sie stimmt also bis auf den Faktor $\{\gamma_p^{(p)}\}^{p-1}$ mit der Determinante D_{p-1} in § 2 überein [vgl. § 2, (9)]. Hieraus folgt, daß die Größen $\alpha_{\varrho_1}^{(m,\eta)}$, $\alpha_{\varrho_2}^{(m,\eta)}$, $\ldots$, $\alpha_{\varrho_{p-1}}^{(m,\eta)}$ genau dieselben Werte haben wie für die in § 2 behandelte Hölдersche Matrix (H_{p-1}). Man entnimmt daher den dortigen Überlegungen, daß die Matrix $(C\to H)_p$ für beliebiges ganzes $p\geqq 1$ der Bedingung (IV) des Hauptsatzes genügt.

2) $(H \to C)_p$. Da auch diese Matrix für $p = 0$ und $p = 1$ die identische Transformation darstellt, darf wieder $p > 1$ vorausgesetzt werden. Bezeichnen wir die Elemente der Matrix mit

$$y_{m\mu}^{(p)} \quad (\mu = 0, 1, \ldots, m;\ m = 0, 1, 2, \ldots),$$

so ist zu zeigen, daß sich dieselben für kleine positive η und große m geeignet durch Gleichungssysteme

$$(11) \qquad y_{m\mu}^{(p)} = \sum_{\eta m < \varrho \leqq m} \alpha_{\varrho}^{(m,\eta)} y_{\varrho\mu}^{(p)} \qquad (\mu = 0, 1, \ldots, [\eta m])$$

verknüpfen lassen.

Wir wählen zunächst wieder η beliebig aus $0 < \eta < 1$ und dann m so groß, daß die Koeffizientenmatrix des Systems (11) mindestens $p - 1$ Zeilen und Spalten aufweist. Die Matrix hat dann wie im vorhergehenden Falle den Rang $p - 1$. Nach (3) hat irgendeine ihrer Spalten, horizontal angeordnet, die Form

$$(12) \quad \sum_{\lambda=1}^{p} \delta_\lambda^{(p)} \frac{\binom{\varrho+\lambda-1}{\lambda-1}}{\binom{\varrho+\lambda}{\lambda}}, \quad \sum_{\lambda=1}^{p} \delta_\lambda^{(p)} \frac{\binom{\varrho+\lambda-2}{\lambda-1}}{\binom{\varrho+\lambda}{\lambda}}, \quad \ldots, \quad \sum_{\lambda=1}^{p} \delta_\lambda^{(p)} \frac{\binom{\varrho+\lambda-1-[\eta m]}{\lambda-1}}{\binom{\varrho+\lambda}{\lambda}}.$$

Unter Heranziehung der Formeln (4) für die Größen δ:

$$(-1)^{\varkappa-1} \sum_{\lambda=\varkappa+1}^{p} \lambda \binom{\lambda-1}{\varkappa} \delta_\lambda^{(p)} = p!\, d_{p-1-\varkappa}^{(p)} \qquad (\varkappa = 0, 1, \ldots, p-1)$$

lassen sich die Elemente dieser Spalte erheblich vereinfachen. Dividiert man nämlich die vorstehenden Gleichungen für $\varkappa = 0, 1, \ldots, p-1$ nacheinander durch $\binom{\varrho+1}{1}, 2\binom{\varrho+2}{2}, \ldots, p\binom{\varrho+p}{p}$ und addiert, so erhält man

$$\sum_{\lambda=1}^{p} \lambda\, \delta_\lambda^{(p)} \sum_{\varkappa=0}^{\lambda-1} (-1)^{\varkappa-1} \frac{\binom{\lambda-1}{\varkappa}}{(\varkappa+1)\binom{\varrho+\varkappa+1}{\varkappa+1}} = p! \sum_{\varkappa=0}^{p-1} \frac{d_{p-1-\varkappa}^{(p)}}{(\varkappa+1)\binom{\varrho+\varkappa+1}{\varkappa+1}}.$$

Da aber[8])

$$\sum_{\varkappa=0}^{\lambda-1} (-1)^{\varkappa-1} \frac{\binom{\lambda-1}{\varkappa}}{(\varkappa+1)\binom{\varrho+\varkappa+1}{\varkappa+1}} = \sum_{\varkappa=0}^{\lambda-1} (-1)^{\varkappa-1} \frac{\binom{\varrho+\lambda}{\lambda-\varkappa-1}}{\lambda\binom{\varrho+\lambda}{\lambda}} = -\frac{\binom{\varrho+\lambda-1}{\lambda-1}}{\lambda\binom{\varrho+\lambda}{\lambda}}$$

[8]) Die hier und für die Umformung der weiteren Elemente der Spalte (12) benötigten Formeln

$$\sum_{\varkappa=0}^{\lambda-1} (-1)^{\varkappa} \binom{\varkappa+\sigma}{\sigma} \binom{\varrho+\lambda}{\lambda-\varkappa-1} = \binom{\varrho+\lambda-1-\sigma}{\lambda-1} \qquad (\sigma = 0, 1, 2, \ldots)$$

ergeben sich sogleich durch Vergleich der Potenzreihenentwicklungen beider Seiten von

$$(1+x)^{\varrho+\lambda}\,(1+x)^{-(1+\sigma)} = (1+x)^{\varrho+\lambda-1-\sigma}.$$

ist, so hat man (wenn man noch $d_{p-1}^{(p)} = 0$ beachtet) für das erste Element der Spalte (12) die Darstellung

$$\sum_{\lambda=1}^{p} \delta_\lambda^{(p)} \frac{\binom{\varrho+\lambda-1}{\lambda-1}}{\binom{\varrho+\lambda}{\lambda}} = -p! \sum_{\varkappa=1}^{p-1} \frac{d_{p-1-\varkappa}^{(p)}}{(\varkappa+1)\binom{\varrho+\varkappa+1}{\varkappa+1}}.$$

Entsprechend folgt für die weiteren Elemente

$$\sum_{\lambda=1}^{p} \delta_\lambda^{(p)} \frac{\binom{\varrho+\lambda-2}{\lambda-1}}{\binom{\varrho+\lambda}{\lambda}} = -p! \sum_{\varkappa=1}^{p-1} \binom{\varkappa+1}{1} \frac{d_{p-1-\varkappa}^{(p)}}{(\varkappa+1)\binom{\varrho+\varkappa+1}{\varkappa+1}},$$

$$\sum_{\lambda=1}^{p} \delta_\lambda^{(p)} \frac{\binom{\varrho+\lambda-3}{\lambda-1}}{\binom{\varrho+\lambda}{\lambda}} = -p! \sum_{\varkappa=1}^{p-1} \binom{\varkappa+2}{2} \frac{d_{p-1-\varkappa}^{(p)}}{(\varkappa+1)\binom{\varrho+\varkappa+1}{\varkappa+1}},$$

. . . . . .

$$\sum_{\lambda=1}^{p} \delta_\lambda^{(p)} \frac{\binom{\varrho+\lambda-1-[\eta m]}{\lambda-1}}{\binom{\varrho+\lambda}{\lambda}} = -p! \sum_{\varkappa=1}^{p-1} \binom{\varkappa+[\eta m]}{[\eta m]} \frac{d_{p-1-\varkappa}^{(p)}}{(\varkappa+1)\binom{\varrho+\varkappa+1}{\varkappa+1}},$$

und damit erhält die Spalte (12), wieder horizontal angeordnet, die Form

$$(13) \quad -p! \sum_{\varkappa=1}^{p-1} \frac{d_{p-1-\varkappa}^{(p)}}{(\varkappa+1)\binom{\varrho+\varkappa+1}{\varkappa+1}}, \quad -p! \sum_{\varkappa=1}^{p-1} \binom{\varkappa+1}{1} \frac{d_{p-1-\varkappa}^{(p)}}{(\varkappa+1)\binom{\varrho+\varkappa+1}{\varkappa+1}}, \ldots,$$
$$-p! \sum_{\varkappa=1}^{p-1} \binom{\varkappa+[\eta m]}{[\eta m]} \frac{d_{p-1-\varkappa}^{(p)}}{(\varkappa+1)\binom{\varrho+\varkappa+1}{\varkappa+1}}.$$

Subtrahiert man nun, bei der letzten Zeile beginnend, von jeder Zeile die vorhergehende und wiederholt diesen Prozeß noch weitere $(p-1)$-mal, wobei man das erste Mal bis zur 1. Zeile, das zweite Mal bis zur 2. Zeile geht usw., so geht (13) über in

$$(14) \quad -p! \sum_{\varkappa=1}^{p-1} \binom{\varkappa-1}{0} \frac{d_{p-1-\varkappa}^{(p)}}{(\varkappa+1)\binom{\varrho+\varkappa+1}{\varkappa+1}},$$

$$-p! \sum_{\varkappa=2}^{p-1} \binom{\varkappa-1}{1} \frac{d_{p-1-\varkappa}^{(p)}}{(\varkappa+1)\binom{\varrho+\varkappa+1}{\varkappa+1}}, \ldots, \quad -p! \binom{p-2}{p-2} \frac{d_0^{(p)}}{p\binom{\varrho+p}{p}}, \ 0, \ldots, \ 0.$$

Dies zeigt, daß sowohl die Koeffizienten- als auch die Gleichungsmatrix von (11) höchstens den Rang $p-1$ hat; die folgenden Betrachtungen zeigen, daß der Rang genau $p-1$ ist.

Wir wenden uns nun vollends zur Auflösung der Gleichungen (11), von denen wir nur noch die $p-1$ ersten, $(\mu = 0, 1, \ldots, p-2)$, in Betracht zu ziehen brauchen. Dabei fixieren wir eine Lösung so, daß wir zunächst willkürlich $p-1$ Indizes $\varrho_1 < \varrho_2 < \cdots < \varrho_{p-1}$ aus $\eta m < \varrho \leqq m$ wählen und

$$\alpha_{\varrho}^{(m,\eta)} = 0 \quad \text{für} \quad \eta m < \varrho \leqq m, \quad \varrho \neq \varrho_1, \varrho_2, \ldots, \varrho_{p-1}$$

setzen, so daß die restlichen Größen $\alpha_{\varrho_1}^{(m,\eta)}, \alpha_{\varrho_2}^{(m,\eta)}, \ldots, \alpha_{\varrho_{p-1}}^{(m,\eta)}$ den Gleichungen

$$y_{m\mu}^{(p)} = \alpha_{\varrho_1}^{(m,\eta)} y_{\varrho_1 \mu}^{(p)} + \alpha_{\varrho_2}^{(m,\eta)} y_{\varrho_2 \mu}^{(p)} + \cdots + \alpha_{\varrho_{p-1}}^{(m,\eta)} y_{\varrho_{p-1}\mu}^{(p)} \quad (\mu = 0, 1, \ldots, p-2) \tag{15}$$

genügen müssen. Die Determinante dieses Gleichungssystems lautet, wenn gleich die dem Übergang von (12) zu (14) entsprechende Umformung vorgenommen und dann noch, mit der letzten Zeile beginnend, ein geeignetes Vielfaches jeder Zeile von den vorhergehenden abgezogen wird, einfach

$$D_p = (-1)^{p-1}(p!)^{p-2} d_{p-2}^{(p)} d_{p-3}^{(p)} \ldots d_0^{(p)} \begin{vmatrix} \frac{1}{\binom{\varrho_1+2}{2}} & \frac{1}{\binom{\varrho_2+2}{2}} & \cdots & \frac{1}{\binom{\varrho_{p-1}+2}{2}} \\ \frac{1}{\binom{\varrho_1+3}{3}} & \frac{1}{\binom{\varrho_2+3}{3}} & \cdots & \frac{1}{\binom{\varrho_{p-1}+3}{3}} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{1}{\binom{\varrho_1+p}{p}} & \frac{1}{\binom{\varrho_2+p}{p}} & \cdots & \frac{1}{\binom{\varrho_{p-1}+p}{p}} \end{vmatrix}.$$

Diese Determinante läßt sich, indem die Elemente jeder Spalte auf einen gemeinsamen Nenner gebracht werden, noch umschreiben in

$$D_p = (-1)^{p-1}(p!)^{p-2} \frac{d_{p-2}^{(p)} d_{p-3}^{(p)} \ldots d_0^{(p)}}{\binom{p}{1}\binom{p}{2}\cdots\binom{p}{p-2}} \cdot \frac{\Delta_p}{\binom{\varrho_1+p}{p}\binom{\varrho_2+p}{p}\cdots\binom{\varrho_{p-1}+p}{p}}$$

mit

$$\Delta_p = \begin{vmatrix} \binom{\varrho_1+p}{p-2} & \binom{\varrho_2+p}{p-2} & \cdots & \binom{\varrho_{p-1}+p}{p-2} \\ \binom{\varrho_1+p}{p-3} & \binom{\varrho_2+p}{p-3} & \cdots & \binom{\varrho_{p-1}+p}{p-3} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \binom{\varrho_1+p}{0} & \binom{\varrho_2+p}{0} & \cdots & \binom{\varrho_{p-1}+p}{0} \end{vmatrix}$$

und Δ_p, indem man, mit der letzten Zeile beginnend, ein geeignetes Vielfaches jeder Zeile von den vorangehenden abzieht, schließlich in

$$\Delta_p = \frac{1}{1!\,2!\ldots(p-2)!} V_{p-1}(\varrho_1, \varrho_2, \ldots, \varrho_{p-1}),$$

wo $V_{p-1}(\varrho_1, \varrho_2, \ldots, \varrho_{p-1})$ die für die Größen $\varrho_1, \varrho_2, \ldots, \varrho_{p-1}$ gebildete VANDERMONDEsche Determinante bedeutet. Für die zu berechnenden Größen $\alpha_{\varrho_\lambda}^{(m,\eta)}$ ergibt sich damit sofort

$$\alpha_{\varrho_\lambda}^{(m\,\eta)} = \frac{\binom{\varrho_\lambda + p}{p}}{\binom{m+p}{p}} \cdot \frac{V_{p-1}(\varrho_1, \ldots, \varrho_{\lambda-1}, m, \varrho_{\lambda+1}, \ldots, \varrho_{p-1})}{V_{p-1}(\varrho_1, \varrho_2, \ldots, \varrho_{p-1})} \quad (\lambda = 1, 2, \ldots, p-1).$$

Die Größen $\alpha_{\varrho_\lambda}^{(m,\,\eta)}$ stimmen bis auf den Faktor $\frac{\varrho_\lambda + p}{m+p}$ mit den entsprechenden Größen der CESÀROschen Matrix (C_{p-1}) überein [vgl. § 1, (8)]. Ihre Abschätzung läßt sich daher in derselben Weise wie in § 1 durchführen. Sie zeigt, daß auch die Matrix $(H \to C)_p$ die Bedingung (IV) des Hauptsatzes erfüllt.

(Eingegangen am 9. April 1942.)

Über die Existenz periodischer Lösungen bei gewissen Systemen gewöhnlicher Differentialgleichungen erster Ordnung.

Herrn Konrad Knopp
zum 60. Geburtstag am 22. Juli 1942 gewidmet.

Von
Max Müller in Tübingen.

Die Differentialgleichung $y' = f(x, y)$ kann, muß aber nicht Integrale mit der Periode ω besitzen, wenn die Funktion $f(x, y)$ die Periodizitätsbedingung

$$f(x + \omega, y) = f(x, y)$$

erfüllt. Das zeigen schon die allereinfachsten Beispiele:

Bei der Gleichung $y' = \cos x$ haben sämtliche Integrale $y = C + \sin x$ die Periode 2π; bei der Gleichung $y' = y$ hat für beliebiges $\omega > 0$ nur das Integral $y \equiv 0$ die Periode ω, während alle übrigen Integrale $y = Ce^x$ $(C \neq 0)$ unperiodisch sind; die Differentialgleichung $y' = 1$ schließlich hat kein einziges periodisches Integral, obwohl ihre rechte Seite $f(x, y) \equiv 1$ die obige Periodizitätsbedingung für jedes $\omega > 0$ erfüllt.

Die Frage, wann eine Differentialgleichung $y' = f(x, y)$, deren rechte Seite die genannte Periodizitätsbedingung befriedigt, wenigstens ein Integral besitzt, das ebenfalls die Periode ω hat, scheint in der Literatur noch nicht behandelt zu sein. Mir ist lediglich eine Arbeit von N. W. Adamoff bekannt, in der gezeigt wird, daß ein gewisses Iterationsverfahren unter gewissen Voraussetzungen, deren Erfülltsein überdies im Einzelfall nur mühsam festgestellt werden kann, ein Integral mit der Periode ω liefert, falls es überhaupt solche Integrale gibt[1]).

In der vorliegenden Arbeit soll — sogleich für ein System gewöhnlicher Differentialgleichungen — eine recht allgemeine Bedingung angegeben werden, die die Existenz mindestens eines periodischen Integrales sicherstellt. Dieses Integral wird mittels eines Verfahrens schrittweiser Näherungen gewonnen, das eine Verallgemeinerung des von Herrn Adamoff angegebenen Iterationsverfahrens ist.

---

[1]) N. W. Adamoff. Sur la recherche des solutions périodiques d'une équation différentielle ordinaire du premier ordre par la méthode des approximations successives. Comptes Rendus (Doklady) de l'Académie des Sciences de l'URSS. **19** (1938), S. 17—22.

§ 1.

Der allgemeine Satz.

Wir werden folgenden Satz beweisen:

Die Funktionen $y_{10}(x), \ldots, y_{m0}(x)$ *sollen für* $-\infty < x < \infty$ *stetige Ableitungen erster Ordnung besitzen und die Periode* ω *haben. In dem Bereich*

$$\mathfrak{S}: -\infty < x < \infty,\ y_{\lambda 0}(x) - a \leqq y_\lambda \leqq y_{\lambda 0}(x) + a\ (\lambda = 1, \ldots, m;\ a > 0)$$

seien die Funktionen $f_1(x, y_1, \ldots, y_m), \ldots, f_m(x, y_1, \ldots, y_m)$ *stetig und den folgenden Bedingungen unterworfen:*

a) *Es sei*

$$f_\mu(x + \omega, y_1, \ldots, y_m) = f_\mu(x, y_1, \ldots, y_m) \quad (\mu = 1, \ldots, m). \tag{1}$$

b) *Es sei für je zwei Stellen* $(x, y_1, \ldots, y_m)$ *und* $(x, z_1, \ldots, z_m)$ *aus* $\mathfrak{S}$ *und* $\mu = 1, \ldots, m$

$$\begin{aligned} &|f_\mu(x, y_1, \ldots, y_m) - f_\mu(x, z_1, \ldots, z_m) + p_\mu(x)(y_\mu - z_\mu)| \\ &\qquad \leqq l_\mu(x) \operatorname*{Max}_{\lambda = 1, \ldots, m} |y_\lambda - z_\lambda|, \end{aligned} \tag{2}$$

wobei $p_\mu(x)$ *für alle* x *stetig,* $l_\mu(x)$ *für alle* x *nicht negativ und über das Intervall* $0 \leqq x \leqq \omega$ *(wenigstens uneigentlich) integrierbar,*

$$p_\mu(x + \omega) = p_\mu(x), \quad l_\mu(x + \omega) = l_\mu(x), \tag{3}$$

$$\int_0^\omega p_\mu(t)\, dt \neq 0 \tag{4}$$

ist.

Es werde

$$P_\mu(x) = \int_0^x p_\mu(t)\, dt, \tag{5}$$

$$\alpha_\mu(x) = e^{-P_\mu(x)} \left\{ \int_0^x e^{P_\mu(t)} l_\mu(t)\, dt + \frac{1}{|e^{P_\mu(\omega)} - 1|} \int_0^\omega e^{P_\mu(t)} l_\mu(t)\, dt \right\}, \tag{6}$$

$$\begin{aligned} \varepsilon = \operatorname*{Max}_{\mu = 1, \ldots, m} \operatorname*{Max}_{0 \leqq x \leqq \omega} & e^{-P_\mu(x)} \left\{ \int_0^x e^{P_\mu(t)} \left[f_\mu(t, y_{10}(t), \ldots, y_{m0}(t)) - y'_{\mu 0}(t) \right] dt + \right. \\ & \left. + \frac{1}{e^{P_\mu(\omega)} - 1} \int_0^\omega e^{P_\mu(t)} \left[f_\mu(t, y_{10}(t), \ldots, y_{m0}(t)) - y'_{\mu 0}(t) \right] dt \right\} \end{aligned} \tag{7}$$

[2])

gesetzt.

Gibt es dann eine Konstante q *derart, daß*

$$0 \leqq \alpha_\mu(x) \leqq q < 1 \quad \text{für } 0 \leqq x \leqq \omega,\ \mu = 1, 2, \ldots, m, \tag{8}$$

$$\frac{\varepsilon}{1 - q} \leqq a, \tag{9}$$

---

[2]) ε ist ein Maß dafür, wie gut bereits die Funktionen $y_{10}(x), \ldots, y_{m0}(x)$ das Differentialgleichungssystem (10) befriedigen.

so hat das System gewöhnlicher Differentialgleichungen

$$y'_\mu = f_\mu(x, y_1, \ldots, y_m) \qquad (\mu = 1, \ldots, m) \tag{10}$$

mindestens ein Integral

$$y_1 = y_1(x), \ldots, y_m = y_m(x)$$

mit der Periodizitätseigenschaft

$$y_\mu(x + \omega) = y_\mu(x) \qquad (\mu = 1, \ldots, m). \tag{11}$$

Dasselbe verläuft in $\mathfrak{Z}$ *und wird aus den Funktionen* $y_{10}(x), \ldots, y_{m0}(x)$ *durch den Iterationsprozeß*

$$y_{\mu, n+1}(x) = y_{\mu n}(x) + e^{-P_\mu(x)} \Big\{ \int_0^x e^{P_\mu(t)} \big[f_\mu(t, y_{1n}(t), \ldots, y_{mn}(t)) - y'_{\mu n}(t) \big] dt + \tag{12}$$

$$+ \frac{1}{e^{P_\mu(\omega)} - 1} \int_0^\omega e^{P_\mu(t)} \big[f_\mu(t, y_{1n}(t), \ldots, y_{mn}(t)) - y'_{\mu n}(t) \big] dt \Big\}$$

$$(\mu = 1, \ldots, m;\ n = 0, 1, 2, \ldots)$$

gewonnen[3]).

Beweis. Wir überzeugen uns zunächst, daß die Funktionensysteme

$$\mathfrak{y}_n(x) = (y_{1n}(x), \ldots, y_{mn}(x)) \tag{13}$$

für alle Nummern n berechnet werden können und die folgenden Eigenschaften haben: Jedes $y_{\mu n}(x)$ ist für alle x stetig differentiierbar, hat die Periode ω und genügt der Ungleichung

$$y_{\mu 0}(x) - a \leqq y_{\mu n}(x) \leqq y_{\mu 0}(x) + a. \tag{14}$$

Für $n = 0$ trifft dies auf Grund der Voraussetzungen über die Funktionen $y_{\mu 0}(x)$ zu. Haben aber alle Funktionen $y_{\mu, r}(x)$, deren zweite Fußmarke $r \leqq n$ ist, diese Eigenschaften, so sind nach (14) und (5) die Integranden in (12) definiert und stetig; da nach (4) der Nenner $e^{P_\mu(\omega)} - 1 \neq 0$ ist, können also die Funktionen $y_{\mu, n+1}(x)$ nach der Vorschrift (12) berechnet werden; sie sind für alle x stetig und auch stetig differentiierbar, weil nach Voraussetzung $P_\mu(x)$ die stetige Ableitung $p_\mu(x)$ hat.

Sie haben auch die Periode ω; denn wird zur Abkürzung

$$h_{\mu n} = \int_0^\omega e^{P_\mu(t)} \big[f_\mu(t, \mathfrak{y}_n(t)) - y'_{\mu n}(t) \big] dt$$

gesetzt und die aus (5) und (3) folgende Beziehung

$$P_\mu(x + \omega) = \int_0^\omega p_\mu(t)\, dt + \int_\omega^{\omega + x} p_\mu(t)\, dt = P_\mu(\omega) + \int_0^x p_\mu(t)\, dt = P_\mu(\omega) + P_\mu(x)$$

[3]) Das ADAMOFFsche Iterationsverfahren ist für $n = 1$ der Sonderfall $p(x) = k$, wo k eine positive Konstante ist, also $P(x) = kx$.

beachtet, so folgt aus den Induktionsannahmen und aus (1), daß

$$y_{\mu,n+1}(x+\omega)$$

$$= y_{\mu n}(x) + e^{-P_\mu(x)-P_\mu(\omega)}\left\{\int_0^{x+\omega} e^{P_\mu(t)}\left[f_\mu(t,\mathfrak{y}_n(t)) - y'_{\mu n}(t)\right]dt + \frac{h_{\mu n}}{e^{P_\mu(\omega)}-1}\right\}$$

$$= y_{\mu n}(x) + e^{-P_\mu(x)-P_\mu(\omega)}\left\{h_{\mu n} + \int_\omega^{\omega+x} e^{P_\mu(t)}\left[f_\mu(t,\mathfrak{y}_n(t)) - y'_{\mu n}(t)\right]dt + \frac{h_{\mu n}}{e^{P_\mu(\omega)}-1}\right\}$$

$$= y_{\mu n}(x) + e^{-P_\mu(x)-P_\mu(\omega)}\left\{\int_0^{x} e^{P_\mu(\tau+\omega)}\left[f_\mu(\tau+\omega,\mathfrak{y}_n(\tau+\omega)) - y'_{\mu n}(\tau+\omega)\right]d\tau + \right.$$

$$\left. + \frac{h_{\mu n}e^{P_\mu(\omega)}}{e^{P_\mu(\omega)}-1}\right\}$$

$$= y_{\mu n}(x) + e^{-P_\mu(x)}\left\{\int_0^{x} e^{P_\mu(\tau)}\left[f_\mu(\tau,\mathfrak{y}_n(\tau)) - y'_{\mu n}(\tau)\right]d\tau + \frac{h_{\mu n}}{e^{P_\mu(\omega)}-1}\right\}$$

$$= y_{\mu,n+1}(x).$$

Ferner ist nach (12) und (5) für $\nu = 0, 1, 2, \ldots, n-1$, $\mu = 1, \ldots, m$

$$y'_{\mu,\nu+1}(x) = y'_{\mu\nu}(x) + f_\mu(x,\mathfrak{y}_\nu(x)) - y'_{\mu\nu}(x) -$$

$$- P'_\mu(x)\,e^{-P_\mu(x)}\left\{\int_0^{x} e^{P_\mu(t)}\left[f_\mu(t,\mathfrak{y}_\nu(t)) - y'_{\mu\nu}(t)\right]dt + \frac{h_{\mu\nu}}{e^{P_\mu(\omega)}-1}\right\}$$

$$= f_\mu(x,\mathfrak{y}_\nu(x)) - p_\mu(x)\,[y_{\mu,\nu+1}(x) - y_{\mu\nu}(x)].$$

Ersetzt man hierin ν durch $\nu-1$, so ergibt sich, daß für $\nu = 1, 2, \ldots, n$, $\mu = 1, 2, \ldots, m$

$$y'_{\mu\nu}(x) = f_\mu(x,\mathfrak{y}_{\nu-1}(x)) - p_\mu(x)\,[y_{\mu\nu}(x) - y_{\mu,\nu-1}(x)]. \tag{15}$$

Trägt man dies in (12) ein, so bekommt man

$$y_{\mu,\nu+1}(x) - y_{\mu\nu}(x)$$

$$= e^{-P_\mu(x)}\left\{\int_0^{x} e^{P_\mu(t)}\left[f_\mu(t,\mathfrak{y}_\nu(t)) - f_\mu(t,\mathfrak{y}_{\nu-1}(t)) - p_\mu(t)\,[y_{\mu\nu}(t) - y_{\mu,\nu-1}(t)]\right]dt + \right.$$

$$+ \frac{1}{e^{P_\mu(\omega)}-1}\int_0^{\omega} e^{P_\mu(t)}\left[f_\mu(t,\mathfrak{y}_\nu(t)) - f_\mu(t,\mathfrak{y}_{\nu-1}(t)) + \right.$$

$$\left.\left. + p_\mu(t)\,[y_{\mu\nu}(t) - y_{\mu,\nu-1}(t)]\right]dt\right\}.$$

Mit Rücksicht auf (2) ist also für $0 \leqq x \leqq \omega$, $\nu = 1, 2, \ldots, n$

$$|y_{\mu,\nu+1}(x) - y_{\mu\nu}(x)| \tag{16}$$

$$\leqq e^{-P_\mu(x)}\left\{\int_0^{x} e^{P_\mu(t)}\,l_\mu(t)\,\max_{\lambda=1,\ldots,m}|y_{\lambda\nu}(t) - y_{\lambda,\nu-1}(t)|\,dt + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{|e^{P_\mu(\omega)}-1|}\int_0^{\omega} e^{P_\mu(t)}\,l_\mu(t)\,\max_{\lambda=1,\ldots,m}|y_{\lambda\nu}(t) - y_{\lambda,\nu-1}(t)|\,dt\right\}.$$

Nun aber ist nach (12), angewandt für $n = 0$, und nach (7) für $0 \leqq x \leqq \omega$, $\lambda = 1, 2, \ldots, m$

$$|y_{\lambda 1}(x) - y_{\lambda 0}(x)| \leqq \varepsilon, \tag{17}$$

also nach (16), (6) und (8) für $0 \leqq x \leqq \omega$, $\mu = 1, 2, \ldots, m$, $\nu = 1, 2, \ldots, n$

$$|y_{\mu,\nu+1}(x) - y_{\mu\nu}(x)| \leqq \varepsilon q^{\nu}, \tag{18}$$

mithin, wenn man (9) beachtet,

$$\begin{aligned} &|y_{\mu,n+1}(x) - y_{\mu 0}(x)| \\ &\leqq |y_{\mu 1}(x) - y_{\mu 0}(x)| + |y_{\mu 2}(x) - y_{\mu 1}(x)| + \cdots + |y_{\mu,n+1}(x) - y_{\mu n}(x)| \\ &\leqq \varepsilon (1 + q + \cdots + q^n) \leqq \frac{\varepsilon}{1-q} \leqq a, \end{aligned}$$

d. h. auch

$$y_{\mu 0}(x) - a \leqq y_{\mu,n+1}(x) \leqq y_{\mu 0}(x) + a$$

für $0 \leqq x \leqq \omega$. Weil alle auftretenden Funktionen die Periode ω haben, gilt diese Ungleichung nachträglich für alle x.

Die Funktionen $y_{\mu,n+1}(x)$ haben also ebenfalls die Eigenschaften, die wir beim Induktionsschluß benutzten. Daher können alle Funktionensysteme (13) berechnet werden; alle Funktionen $y_{\mu n}(x)$ sind für $-\infty < x < \infty$ stetig differentiierbar, haben die Periode ω und erfüllen die Ungleichungen (14). Überdies gilt nach (17) und (18) für alle x die Ungleichung

$$|y_{\mu n}(x) - y_{\mu,n-1}(x)| \leqq \varepsilon q^{n-1} \qquad (\mu = 1, \ldots, m;\ n = 1, 2, \ldots). \tag{19}$$

Aus (19) folgt jetzt weiter, weil $q < 1$ ist, daß jede der m Reihen

$$y_{\mu 0}(x) + [y_{\mu 1}(x) - y_{\mu 0}(x)] + [y_{\mu 2}(x) - y_{\mu 1}(x)] + \cdots$$

für alle x gleichmäßig konvergiert. Es existieren daher die Grenzfunktionen

$$\lim_{n \to \infty} y_{\mu n}(x) = y_{\mu}(x) \qquad (\mu = 1, 2, \ldots, m); \tag{20}$$

sie sind stetig, haben die Periode ω und erfüllen nach (14) die Ungleichungen

$$y_{\mu 0}(x) - a \leqq y_{\mu}(x) \leqq y_{\mu 0}(x) + a \qquad (\mu = 1, \ldots, m). \tag{21}$$

Nach (15) ist

$$\begin{aligned} y_{\mu n}(x) = y_{\mu n}(0) &+ \int_0^x f_{\mu}(t, y_{1,n-1}(t), \ldots, y_{m,n-1}(t))\, dt - \\ &- \int_0^x p_{\mu}(t)\, [y_{\mu n}(t) - y_{\mu,n-1}(t)]\, dt. \end{aligned} \tag{22}$$

Da $p_{\mu}(t)$ stetig und periodisch, also beschränkt ist, und (19) gilt, ferner nach (14) für jede Nummer n die Stelle $(t, y_{1,n-1}(t), \ldots, y_{m,n-1}(t))$ und nach (21) auch

die Stelle $(t, y_1(t), \ldots, y_m(t))$ dem Gebiet $\mathfrak{S}$ angehört, in welchem infolge der Periodizitätsvoraussetzung (1) die Funktionen f_μ sogar gleichmäßig stetig sind, ergibt sich aus (22) beim Grenzübergang $n \to \infty$, daß

$$y_\mu(x) = y_\mu(0) + \int_0^x f_\mu(t, y_1(t), \ldots, y_m(t))\, dt \qquad (\mu = 1, \ldots, m).$$

Weil hier die Integranden stetig sind, sind die Funktionen $y_\mu(x)$ für alle x auch differentiierbar; es ist

$$y'_\mu(x) = f_\mu(x, y_1(x), \ldots, y_m(x)) \qquad (\mu = 1, \ldots, m);$$

die Funktionen $y_\mu(x)$ bilden also ein Integral des Differentialgleichungssystems (10) mit der Periodizitätseigenschaft (11).

Damit ist der Satz bewiesen.

§ 2.

Bemerkungen zu den Voraussetzungen und Sonderfälle.

Hat f_μ in $\mathfrak{S}$ stetige partielle Ableitungen erster Ordnung, so ist für eine geeignet gewählte Zwischenstelle $(x, \eta_1, \ldots, \eta_m)$

$$f_\mu(x, y_1, \ldots, y_m) - f_\mu(x, z_1, \ldots, z_m) = \sum_{\lambda=0}^{m} \frac{\partial f_\mu}{\partial y_\lambda}(x, \eta_1, \ldots, \eta_m)\,(y_\lambda - z_\lambda),$$

also für jede stetige Funktion $p_\mu(x)$, die die Bedingungen (3) und (4) erfüllt,

$$f_\mu(x, y_1, \ldots, y_m) - f_\mu(x, z_1, \ldots, z_m) + p_\mu(x)\,(y_\mu - z_\mu)$$

$$= \sum_{\lambda \neq \mu} \frac{\partial f_\mu}{\partial y_\lambda}(x, \eta_1, \ldots, \eta_m)\,(y_\lambda - z_\lambda) + \left[\frac{\partial f_\mu}{\partial y_\mu}(x, \eta_1, \ldots, \eta_m) + p_\mu(x)\right](y_\mu - z_\mu).$$

Da die Funktion f_μ die Periodizitätseigenschaft (1) hat, kann man auch jedes $\eta_\lambda = \eta_\lambda(x, y_1, \ldots, y_m, z_1, \ldots, z_m)$ so wählen, daß es in bezug auf x die Periode ω hat. Daher gibt es eine Funktion $S_\mu(x)$, die stetig ist und die Periode ω hat, so daß

$$\left|\frac{\partial f_\mu}{\partial y_\lambda}(x, \eta_1, \ldots, \eta_m)\right| \leqq S_\mu(x) \quad (\lambda = 1, 2, \ldots, m;\ \lambda \neq \mu),$$

$$\left|\frac{\partial f_\mu}{\partial y_\mu}(x, \eta_1, \ldots, \eta_m) + p_\mu(x)\right| \leqq S_\mu(x)$$

und daher

$$|f_\mu(x, y_1, \ldots, y_m) - f_\mu(x, z_1, \ldots, z_m) + p_\mu(x)\,(y_\mu - z_\mu)|$$

$$\leqq S_\mu(x) \sum_{\lambda=1}^{m} |y_\lambda - z_\lambda| \leqq m S_\mu(x) \operatorname*{Max}_{\lambda = 1, \ldots, m} |y_\lambda - z_\lambda|.$$

Die Voraussetzung (2) ist also gewiß mit $l_\mu(x) = m S_\mu(x)$ erfüllt. Damit möglichst auch die Voraussetzung (8) erfüllt ist, wird man die Funktion $p_\mu(x)$

hierbei so zu wählen suchen, daß das nach (6) berechnete $\alpha_\mu(x)$ möglichst klein bleibt.

Ist $p_\mu(x) \geqq 0$ und gibt es eine nicht-negative Konstante L_μ derart, daß

$$|f_\mu(x, y_1, \ldots, y_m) - f_\mu(x, z_1, \ldots, z_m) + p_\mu(x)(y_\mu - z_\mu)| \leqq L_\mu p_\mu(x) \operatorname*{Max}_{\lambda=1,\ldots,m} |y_\lambda - z_\lambda|,$$

so kann $l_\mu(x) = L_\mu p_\mu(x)$ gesetzt werden; es wird $\alpha_\mu(x) = L_\mu$; die Bedingung (8) bedeutet dann, daß $L_\mu < 1$ sein soll.

Ist aber $p_\mu(x) \leqq 0$ und gibt es eine nicht-negative Konstante L_μ derart, daß

$$|f_\mu(x, y_1, \ldots, y_m) - f_\mu(x, z_1, \ldots, z_m) + p_\mu(x)(y_\mu - z_\mu)| \leqq -L_\mu p_\mu(x) \operatorname*{Max}_{\lambda=1,\ldots,m} |y_\lambda - z_\lambda|,$$

so kann $l_\mu(x) = -L_\mu p_\mu(x)$ gesetzt werden; es wird

$$\alpha_\mu(x) = L_\mu(2\, e^{-P_\mu(x)} - 1),$$

und die Bedingung (8) ist erfüllt, wenn zwischen $p_\mu(x)$ und L_μ die Beziehung

$$L_\mu(2\, e^{-P_\mu(\omega)} - 1) < 1$$

besteht.

Für $n = 1$ kann die Bedingung (2) unter Weglassung entbehrlicher Fußmarken geschrieben werden:

$$|f(x, y) - f(x, z) + p(x)(y - z)| \leqq l(x)\,|y - z|;$$

sie besagt also, daß für $y \neq z$

$$-p(x) - l(x) \leqq \frac{f(x, y) - f(x, z)}{y - z} \leqq -p(x) + l(x) \tag{23}$$

sein soll. Da $l(x)$ nicht beschränkt zu sein braucht, verlangt sie in gewisser Hinsicht weniger als die übliche Lipschitz-Bedingung, die Beschränktheit des Differenzenquotienten bedeutet. In anderer Hinsicht verlangt die Bedingung (2) mehr als die gewöhnliche Lipschitz-Bedingung: Nach (23) muß

$$\frac{f(x, y) - f(x, z)}{y - z} = -p(x) + \theta(x, y, z)\, l(x)$$

sein, wo $|\theta(x, y, z)| \leq 1$. Dabei sind $p(x)$ und $l(x)$ an die Bedingungen (4) und

$$e^{-P(x)} \left\{ \int_0^x e^{P(t)} l(t)\, dt + \frac{1}{|e^{P(\omega)} - 1|} \int_0^\omega e^{P(t)} l(t)\, dt \right\} \leqq q < 1 \tag{24}$$

gebunden. Man kann also im Fall $n = 1$ die Bedingungen (2), (4) und (8) so deuten: Der Differenzenquotient von $f(x, y)$ in bezug auf y soll „im Durchschnitt“ [siehe (24)] nicht zu sehr abweichen von einer Funktion $-p(x)$, deren Mittelwert im Periodenintervall von Null verschieden ist [siehe (4)].

Für $p(x) \geqq 0$, $l(x) = Lp(x)$ geht (23) über in

$$-(1+L)\,p(x) \leqq \frac{f(x,y)-f(x,z)}{y-z} \leqq -(1-L)\,p(x). \tag{25}$$

Daraus folgt insbesondere: Ist $f(x, y)$ in der ganzen (x, y)-Ebene stetig, $f(x+\omega, y) = f(x, y)$, gibt es eine Konstante L mit $0 \leqq L < 1$ und eine stetige Funktion $p(x)$ mit der Periode ω, die (4) erfüllt, derart, daß (25) gilt, so hat die Differentialgleichung $y' = f(x, y)$ mindestens ein Integral mit der Periode ω. Die Bedingung (25) besagt aber im wesentlichen, daß $f(x, y)$ einen beschränkten Differenzenquotienten in bezug auf y haben, eine nicht steigende Funktion von y und „im Mittel für alle x eines Periodenintervalles" sogar eine abnehmende Funktion von y sein soll.

Daß die Bedingung (4) nicht entbehrt werden kann, lehrt das dritte der eingangs erwähnten Beispiele; denn bei dieser Differentialgleichung $y' = 1$ sind mit $p(x) = l(x) = 0$ die Bedingungen (23) und (24), aber nicht die Bedingung (4) erfüllt. Dieses Beispiel zeigt aber auch, daß zur Bedingung (4) noch eine Bedingung über $l(x)$, wie etwa die Bedingung (24), hinzutreten muß, damit der Satz richtig bleibt; mit $p(x) = l(x) = |\sin x|$ sind nämlich die Bedingungen (23) und (4) erfüllt, ohne daß periodische Integrale vorhanden sind.

(Eingegangen am 21. Januar 1942.)

Über eine für die Invariantentheorie wichtige Funktionalgleichung.

Herrn Konrad Knopp
zum 60. Geburtstag am 22. Juli 1942 gewidmet.

Von

Oskar Perron in München.

Bezeichnungen.

In dieser Arbeit sind n und ν zwei fest gegebene natürliche Zahlen. Mit großen lateinischen Buchstaben werden n-reihige quadratische Matrizes bezeichnet, mit den entsprechenden kleinen Buchstaben und zwei unteren Indizes ihre Elemente. Mit großen griechischen Buchstaben, die eventuell noch mit oberen Indizes versehen sind, werden ν-reihige quadratische Matrizes bezeichnet, mit den entsprechenden kleinen Buchstaben und zwei unteren Indizes ihre Elemente. Gelegentlich vorkommende Matrizes mit anderen Zeilen- und Spaltenzahlen, auch nichtquadratische, werden mit großen, und ihre Elemente mit den entsprechenden kleinen deutschen Buchstaben bezeichnet. Also z. B.:

$$X = \begin{pmatrix} x_{11} & \dots & x_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ x_{n1} & \dots & x_{nn} \end{pmatrix}, \quad \mathsf{A}^{pq} = \begin{pmatrix} \alpha_{11}^{pq} & \dots & \alpha_{1\nu}^{pq} \\ \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{\nu 1}^{pq} & \dots & \alpha_{\nu\nu}^{pq} \end{pmatrix}, \quad \mathfrak{A} = \begin{pmatrix} \mathfrak{a}_{11} & \dots & \mathfrak{a}_{1r} \\ \dots & \dots & \dots \\ \mathfrak{a}_{s1} & \dots & \mathfrak{a}_{sr} \end{pmatrix}.$$

Die Elemente aller Matrizes sind komplexe Zahlen.

Die n- bzw. ν-reihige quadratische Einheitsmatrix wird mit E bzw. E, jede Nullmatrix, auch nichtquadratische, einfach durch das Zahlzeichen 0 bezeichnet, was zu keiner Verwechslung Anlaß geben wird. Entsprechend den Zeichen E und E sind unter e_{rs} und $\varepsilon_{\varrho\sigma}$ Kroneckersymbole zu verstehen:

$$e_{rs} = \begin{cases} 1 \text{ für } r = s \\ 0 \text{ für } r \neq s \end{cases} \qquad (r, s = 1, \dots, n),$$

$$\varepsilon_{\varrho\sigma} = \begin{cases} 1 \text{ für } \varrho = \sigma \\ 0 \text{ für } \varrho \neq \sigma \end{cases} \qquad (\varrho, \sigma = 1, \dots, \nu).$$

Die Determinante einer quadratischen Matrix wird durch zwei Striche bezeichnet: $|X|$, $|\mathsf{A}^{pq}|$.

Das Zeichen $\Phi(X)$ bedeutet, daß die Matrix Φ eine Funktion der Matrix X ist, d. h., daß die ν^2 Elemente $\varphi_{11}, \varphi_{12}, \dots, \varphi_{\nu\nu}$ Funktionen der n^2 komplexen

Variabeln $x_{11}, x_{12}, \ldots, x_{nn}$ sind. Kleine Buchstaben ohne oder mit nur *einem* unteren Index werden gelegentlich als Zahl- oder Funktionszeichen gebraucht; z. B. bedeutet $\varphi(X)$ eine Funktion der Matrix X, d. h. der n^2 Variabeln $x_{11}, \ldots, x_{nn}$.

§ 1.

Einleitung.

Wenn man eine n-äre Form durch eine Matrix X linear transformiert, entsteht eine neue Form. Bezeichnet man als Invariante der alten Form ein Polynom ihrer Koeffizienten, das nach Ersetzung der alten Koeffizienten durch die neuen sich mit einem lediglich von der Transformationsmatrix X abhängigen Faktor $\varphi(X)$ multipliziert, so muß dieser Faktor bekanntlich eine Potenz der Determinante $|X|$ sein. Man sieht das sofort ein, wenn man zwei lineare Transformationen hintereinander ausführt. Dann ergibt sich nämlich für $\varphi(X)$ die Funktionalgleichung

$$\varphi(Y)\,\varphi(X) = \varphi(XY). \tag{1}$$

Hieraus folgt zunächst für $Y = E$, da $\varphi(X)$ nicht identisch verschwindet,

$$\varphi(E) = 1 \tag{2}$$

und sodann für $Y = X^{-1}$

$$\varphi(X^{-1})\,\varphi(X) = \varphi(E) = 1 \tag{3}$$

Nun ist $\varphi(X)$ ein Polynom von $x_{11}, x_{12}, \ldots, x_{nn}$, daher $|X|^r\,\varphi(X^{-1})$, wenn r genügend groß ist, ebenfalls ein Polynom dieser Variabeln. Somit folgt aus (3) nach Multiplikation mit $|X|^r$, daß $\varphi(X)$ ein Teiler von $|X|^r$, also wegen der Irreduzibilität von $|X|$ selbst eine Potenz von $|X|$ ist, multipliziert mit einer Konstanten, die wegen (2) gleich 1 sein muß. W. z. b. w. Aber auch, wenn man für $\varphi(X)$ nicht nur Polynome, sondern beliebige in der Umgebung von $X = E$ analytische Funktionen zuläßt, hat die Funktionalgleichung (1), wie wir sehen werden, keine anderen Lösungen als $\varphi(X) = |X|^\alpha$, wobei dann aber α eine beliebige komplexe Zahl sein darf (Satz 12).

Bezeichnet man allgemeiner als „Invarianzverein" der alten Form ein System von r Polynomen ihrer Koeffizienten, das nach Ersetzung der alten Koeffizienten durch die neuen sich linear transformiert, wobei die r-reihige Transformationsmatrix lediglich von der Matrix X abhängt, also eine Funktion $\Phi(X)$ ist[1]), so ergibt sich analog zu (1) die Funktionalgleichung

$$\Phi(Y)\,\Phi(X) = \Phi(XY). \tag{4}$$

[1]) Auf die noch nicht entwickelte Theorie der Invarianzvereine soll hier nicht weiter eingegangen werden. Als Beispiel sei nur erwähnt, daß die Koeffizienten einer Kovariante stets einen Invarianzverein bilden.

Nicht wesentlich davon verschieden ist die Funktionalgleichung

$$\Phi(X)\,\Phi(Y) = \Phi(XY). \tag{5}$$

Denn bezeichnet man die zu Φ bzw. X transponierte Matrix mit Φ' bzw. X' und setzt man $\Phi(X) = \Psi(X')$, so ist (4) gleichbedeutend mit

$$\Phi'(X)\,\Phi'(Y) = \Phi'(XY)$$

und auch mit

$$\Psi(Y')\,\Psi(X') = \Psi(Y'X') \text{ oder also mit } \Psi(X')\,\Psi(Y') = \Psi(X'Y').$$

Daher geht jede Lösung von (4) in eine Lösung von (5) über und umgekehrt, wenn man Φ durch Φ', also $\varphi_{\varrho\sigma}$ durch $\varphi_{\sigma\varrho}$ ersetzt; ebenso, wenn man X durch X', also x_{rs} durch x_{sr} ersetzt.

Die Funktionalgleichung (5) ist es, die wir im folgenden behandeln wollen. Da Φ eine ν-reihige Matrix ist, so handelt es sich in Wahrheit um ein System von ν^2 Funktionalgleichungen für die ν^2 Funktionen $\varphi_{11}, \varphi_{12}, \ldots, \varphi_{\nu\nu}$. Für die Theorie der Invarianzvereine interessieren natürlich nur Lösungen, die Polynome von $x_{11}, x_{12}, \ldots, x_{nn}$ sind, insbesondere homogene. Wir werden aber überhaupt Lösungen $\Phi(X)$ suchen, die in der Umgebung von $X = E$ analytisch sind, d. h., die sich nach Potenzen der n^2 Variabeln $x_{pq} - e_{pq}$ entwickeln lassen.

§ 2.

Triviale Lösungen. Reduzible und irreduzible Lösungen.

Satz 1. *Die Gleichung* (5) *hat unter anderen die konstanten Lösungen* $\Phi(X) = \mathsf{E}$ *und* $\Phi(X) = 0$.

Satz 2. *Ist* $\Phi(X)$ *eine Lösung der Gleichung* (5) *und* Γ *eine konstante Matrix mit* $|\Gamma| \neq 0$, *so ist* $\Gamma^{-1}\Phi(X)\Gamma$ *ebenfalls eine Lösung.*

Insbesondere ergibt sich, wenn man in einer Lösung $\Phi(X)$ die Zeilen und Spalten in gleicher Weise permutiert, wieder eine Lösung, weil ja jede solche Permutation durch hintere und vordere Multiplikation mit einer Matrix Γ und ihrer reziproken bewirkt werden kann.

Satz 3. *Ist* $\Phi(X)$ *eine Lösung der Gleichung* (5) *und* C *eine konstante Matrix mit* $|C| \neq 0$, *so ist* $\Phi(C^{-1}XC)$ *ebenfalls eine Lösung.*

Insbesondere ergibt sich, wenn man in einer Lösung $\Phi(X)$ die vorderen und hinteren Indizes der x_{pq} in gleicher Weise permutiert, wieder eine Lösung.

Satz 4. *Ist* $\Phi(X)$ *eine Lösung von* (5), *so ist* $|X|^{\alpha}\Phi(X) = e^{\alpha \log |X|}\Phi(X)$, *wo* α *irgendeine komplexe Zahl ist, ebenfalls eine Lösung. Nach Satz* 1 *ist also insbesondere* $\Phi(X) = |X|^{\alpha}\mathsf{E}$ *eine Lösung.*

Satz 5. *Die Gleichung* (5) *hat u. a. die Lösung*

$$\Phi(X) = |X|^{\mathsf{A}} = e^{\mathsf{A}\log|X|} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\mathsf{A}\log|X|)^k}{k!},$$

wobei A *irgendeine konstante Matrix ist. Speziell für* $\mathsf{A} = \alpha\,\mathsf{E}$ *ist das die schon in Satz* 4 *angegebene Lösung.*

Die Beweise dieser Sätze sind evident.

Zwei Lösungen $\Phi^1(X)$ und $\Phi^2(X)$, die in der Beziehung $\Phi^2(X) = \Gamma^{-1}\Phi^1(X)\,\Gamma$ stehen (Satz 2), heißen *äquivalent*. Dieser Äquivalenzbegriff ist reflexiv, symmetrisch und transitiv. Auch an Satz 3 läßt sich ein entsprechender Äquivalenzbegriff anschließen, den wir aber nicht gebrauchen werden.

Wir zerlegen jetzt ν irgendwie in zwei Summanden: $\nu = \varrho + \sigma$. Ist $\mathfrak{A}(X)$ eine ϱ-reihige, $\mathfrak{B}(X)$ eine σ-reihige quadratische Matrix und ist

$$\mathfrak{A}(X)\,\mathfrak{A}(Y) = \mathfrak{A}(XY), \qquad \mathfrak{B}(X)\,\mathfrak{B}(Y) = \mathfrak{B}(XY),$$

so stellt die ν-reihige Matrix

$$\Phi(X) = \begin{pmatrix} \mathfrak{A}(X) & 0 \\ 0 & \mathfrak{B}(X) \end{pmatrix} \tag{6}$$

offenbar eine Lösung von (5) dar. Eine solche Lösung und jede damit äquivalente heißt *reduzibel*, jede andere heißt *irreduzibel*. Hiernach sind, wenn man für jede kleinere Reihenzahl als ν bereits alle Lösungen unserer Funktionalgleichung kennt, auch für ν Reihen bereits alle reduzibeln Lösungen bekannt, so daß nur noch die irreduzibeln interessieren.

Um die Gewinnung irreduzibler Lösungen vorzubereiten, setzen wir in (5) zuerst $Y = E$, sodann $X = E$; dadurch kommt

$$\Phi(X)\,\Phi(E) = \Phi(X), \qquad \Phi(E)\,\Phi(Y) = \Phi(Y), \tag{7}$$

also insbesondere auch

$$\Phi(E)\,\Phi(E) = \Phi(E). \tag{8}$$

Aus (7) folgt, wenn $\Phi(X)$ nicht identisch verschwindet, im Fall $\nu = 1$ die Gleichung (2) (mit Φ an Stelle von φ). Im Fall $\nu > 1$ braucht aber die analoge Gleichung $\Phi(E) = \mathsf{E}$ nicht zu gelten. Wenn man nämlich eine Lösung unserer Funktionalgleichung mit $\nu - 1$ an Stelle von ν betrachtet und wenn man diese $(\nu - 1)$-reihige Matrix durch Einschaltung einer in der Diagonale sich kreuzenden Zeile und Spalte mit lauter Nullen zu einer ν-reihigen Matrix $\Phi(X)$ ergänzt, so ist $\Phi(X)$ offenbar eine (reduzible) Lösung von (5), weil sie nach eventueller Permutation der Zeilen und Spalten die Form (6) mit $\mathfrak{B}(X) = 0$ annimmt. Dabei hat aber die Matrix $\Phi(E)$ in dem neu eingeschobenen Diagonalpunkt keinen Einser, sondern eine Null stehen, sie ist also nicht die Einheitsmatrix E. Wenn allgemeiner eine Lösung $\Phi(X)$ von (5) die Eigenschaft hat, daß eine damit äquivalente Lösung $\Gamma^{-1}\Phi(X)\,\Gamma$ in einer sich in

der Diagonale kreuzenden Zeile und Spalte lauter Nullen hat, so ist $\Gamma^{-1}\Phi(E)\Gamma = \mathsf{E}$, also auch $\Phi(E) = \mathsf{E}$. Wir wollen jetzt zeigen, daß abgesehen von diesem Fall, in dem also die Reihenzahl ν auf $\nu - 1$ reduziert werden kann, stets $\Phi(E) = \mathsf{E}$ ist, daß also der folgende Satz gilt:

Satz 6. *Wenn es zu einer Lösung* $\Phi(X)$ *von* (5) *keine äquivalente Lösung* $\Gamma^{-1}\Phi(X)\Gamma$ *gibt, die in einer sich in der Diagonale kreuzenden Zeile und Spalte lauter Nullen hat, also insbesondere, wenn* $\Phi(X)$ *irreduzibel ist, so ist* $\Phi(E) = \mathsf{E}$.

Zum Beweis setzen wir $\Phi(E) = \mathsf{A}$. Bekanntlich gibt es eine Matrix Γ derart, daß die Matrix $\mathsf{B} = \Gamma^{-1}\mathsf{A}\Gamma$ „Diagonalform" oder wenigstens „Kästchenform" hat, wobei sich längs der Diagonale Kästchen der Gestalt

$$\begin{pmatrix} \beta & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & \beta & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \beta & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & \beta \end{pmatrix}$$

reihen und außerhalb dieser Kästchen lauter Nullen stehen[2]). Dabei ist die Reihenzahl r eines Kästchens gleich dem Exponenten des Elementarteilers $(\lambda - \beta)^r$ der Matrix $\mathsf{A} - \lambda\mathsf{E}$. Nach (8) ist nun $\mathsf{AA} = \mathsf{A}$, also auch $\mathsf{BB} = \mathsf{B}$. Daraus ergibt sich leicht, daß alle Elementarteiler den Exponenten 1 haben. Denn bei einem höheren Exponenten hat B, da man das entsprechende Kästchen links oben hin bringen kann, die Gestalt

$$\mathsf{B} = \begin{pmatrix} \beta & 0 & \dots \\ 1 & \beta & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}, \quad \text{woraus folgt:} \quad \mathsf{BB} = \begin{pmatrix} \beta^2 & 0 & \dots \\ 2\beta & \beta^2 & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}.$$

Wegen $\mathsf{BB} = \mathsf{B}$ ist also $\beta^2 = \beta$, $2\beta = 1$, was sich widerspricht. Somit hat B reine Diagonalform:

$$\mathsf{B} = \begin{pmatrix} \beta_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \beta_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \beta_\nu \end{pmatrix}.$$

Nach (7) ist $\Phi(X)\mathsf{A} = \mathsf{A}\Phi(X) = \Phi(X)$ und daher, wenn man die zu $\Phi(X)$ äquivalente Lösung $\Gamma^{-1}\Phi(X)\Gamma$ mit $\Psi(X)$ bezeichnet,

$$\Psi(X)\mathsf{B} = \mathsf{B}\Psi(X) = \Psi(X),$$

---

[2]) Man sehe etwa: M. Bôcher, Einführung in die höhere Algebra, 2. Aufl., 1925, § 100; oder L. E. Dickson-Bodewig, Höhere Algebra, 1929, § 53, 54; oder B. L. van der Waerden, Moderne Algebra, Bd. II (1931), § 109, 2. Auflage 1940, § 111.

oder ausführlicher

$$\begin{vmatrix} \beta_1 \psi_{11}(X) & \dots & \beta_\nu \psi_{1\nu}(X) \\ \beta_1 \psi_{21}(X) & \dots & \beta_\nu \psi_{2\nu}(X) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \beta_1 \psi_{\nu 1}(X) & \dots & \beta_\nu \psi_{\nu\nu}(X) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \beta_1 \psi_{11}(X) & \dots & \beta_1 \psi_{1\nu}(X) \\ \beta_2 \psi_{21}(X) & \dots & \beta_2 \psi_{2\nu}(X) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \beta_\nu \psi_{\nu 1}(X) & \dots & \beta_\nu \psi_{\nu\nu}(X) \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} \psi_{11}(X) & \dots & \psi_{1\nu}(X) \\ \psi_{21}(X) & \dots & \psi_{2\nu}(X) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \psi_{\nu 1}(X) & \dots & \psi_{\nu\nu}(X) \end{vmatrix}.$$

Ist nun μ eine beliebige, aber zunächst festzuhaltende Zahl aus der Reihe $1, \dots, \nu$, so folgt hieraus

$$\beta_\mu \psi_{\lambda\mu}(X) = \psi_{\lambda\mu}(X) \quad \text{für } \lambda = 1, \dots, \nu,$$
$$\beta_\mu \psi_{\mu\lambda}(X) = \psi_{\mu\lambda}(X) \quad \text{für } \lambda = 1, \dots, \nu.$$

Da aber die hier auftretenden Funktionen $\psi_{\lambda\mu}(X)$ und $\psi_{\mu\lambda}(X)$ gerade die μ-te Spalte und Zeile füllen, so sind sie nach Voraussetzung nicht alle identisch gleich 0, und es ergibt sich $\beta_\mu = 1$. Da das für jede der Zahlen $\mu = 1, \dots, \nu$ gilt, so ist zunächst

$$\mathsf{B} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{vmatrix} = \mathsf{E}$$

und folglich auch $\mathsf{A} = \Gamma \mathsf{B} \Gamma^{-1} = \mathsf{E}$. W. z. b. w.

Nach Satz 6 bedeutet es keine Beschränkung der Allgemeinheit, wenn wir von jetzt an voraussetzen:

(9) $$\Phi(E) = \mathsf{E}.$$

§ 3.

Differentialgleichungen.

Wir suchen Lösungen $\Phi(X)$ von (5), welche in der Umgebung von $X = E$ analytisch sind. Unter der partiellen Ableitung $\frac{\partial \Phi(X)}{\partial x_{pq}}$ verstehen wir die Matrix

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial \varphi_{11}}{\partial x_{pq}} & \dots & \frac{\partial \varphi_{1\nu}}{\partial x_{pq}} \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ \frac{\partial \varphi_{\nu 1}}{\partial x_{pq}} & \dots & \frac{\partial \varphi_{\nu\nu}}{\partial x_{pq}} \end{vmatrix}.$$

Setzen wir zur Abkürzung $XY = Z$, so daß

$$z_{rq} = \sum_{p=1}^{n} x_{rp}\, y_{pq} \qquad (r, q = 1, \ldots, n)$$

ist, so folgt aus (5) durch partielle Ableitung nach y_{pq}

$$\Phi(X)\,\frac{\partial \Phi(Y)}{\partial y_{pq}} = \sum_{r=1}^{n} \frac{\partial \Phi(Z)}{\partial z_{rq}}\, x_{rp},$$

und wenn man hier speziell $Y = E$ setzt und die Abkürzung

$$\left\{\frac{\partial \Phi(X)}{\partial x_{pq}}\right\}_{X=E} = \mathsf{A}^{pq} \tag{10}$$

einführt:

$$\Phi(X)\,\mathsf{A}^{pq} = \sum_{r=1}^{n} \frac{\partial \Phi(X)}{\partial x_{rq}}\, x_{rp} \qquad (p, q = 1, \ldots, n). \tag{11}$$

Nun ist

$$\sum_{p=1}^{n} x_{rp}\,\frac{\partial |X|}{\partial x_{sp}} = e_{rs}\,|X|, \qquad \sum_{s=1}^{n} \frac{\partial |X|}{\partial x_{sp}}\, x_{st} = e_{pt}\,|X|. \tag{12}$$

Unter Anwendung der ersten dieser Formeln folgt aus (11) durch Multiplikation mit $\frac{\partial |X|}{\partial x_{sp}}$ und Summation nach p, wenn man noch die rechte und linke Seite vertauscht,

$$|X|\,\frac{\partial \Phi(X)}{\partial x_{sq}} = \sum_{p=1}^{n} \frac{\partial |X|}{\partial x_{sp}}\,\Phi(X)\,\mathsf{A}^{pq} \qquad (s, q = 1, \ldots, n), \tag{13}$$

und umgekehrt folgt aus (13) auch wieder (11), wenn man mit x_{st} multipliziert und nach s summiert, wobei die zweite der Formeln (12) anzuwenden ist. Damit ist bewiesen

Satz 7. *Jede in der Umgebung von $X = E$ analytische Lösung $\Phi(X)$ der Gleichung* (5) *genügt einem System von partiellen Differentialgleichungen der Form* (13), *wobei die A^{pq} gewisse konstante Matrizes sind.*

Es ist das ein System von n^2 Gleichungen für die Matrix Φ, also eigentlich ein System von $n^2 r^2$ Gleichungen für die r^2 Funktionen $\varphi_{11}, \varphi_{12}, \ldots, \varphi_{rr}$. Damit dieses System eine von der trivialen Lösung $\Phi(X) = 0$ verschiedene Lösung hat, müssen die Konstanten A^{pq} die „Integrabilitätsbedingungen" erfüllen, mit denen wir uns bald beschäftigen werden. Aber auch wenn die A^{pq} diese Bedingungen erfüllen, so braucht eine Lösung von (13) noch lange keine Lösung von (5) zu sein. Wenn aber auch die Bedingung (9) erfüllt ist, so trifft das zu; es gilt nämlich die folgende Umkehrung von Satz 7:

Satz 8. *Wenn das Differentialgleichungssystem* (13) *eine in der Umgebung von $X = E$ analytische Lösung $\Phi(X)$ hat, für die $\Phi(E) = \mathsf{E}$ ist, so ist $\Phi(X)$ auch eine Lösung der Gleichung* (5).

Beim Beweis sehen wir zunächst von der Nebenbedingung $\Phi(E) = \mathsf{E}$ ab und wollen zeigen, daß infolge des Systems (13) auch die folgende Gleichung gilt:

$$(14)\quad |X|^k \frac{\partial^k \Phi(X)}{\partial x_{s_1 q_1} \dots \partial x_{s_k q_k}} = \sum_{p_1, \dots, p_k} \frac{\partial |X|}{\partial x_{s_1 p_1}} \dots \frac{\partial |X|}{\partial x_{s_k p_k}} \Phi(X)\, \mathsf{A}^{p_1 q_1; \dots; p_k q_k},$$

wo alle Summationsindizes von 1 bis n laufen und auch die übrigen Indizes die Werte 1, ..., n haben. Dabei sind die konstanten Matrizes $\mathsf{A}^{p_1 q_1; \dots; p_k q_k}$ im Fall $k = 1$ die in (13) auftretenden und sind für $k > 1$ durch folgende Rekursionsformel definiert:

$$(15)\quad \mathsf{A}^{p_1 q_1; \dots; p_k q_k; pq} = \mathsf{A}^{pq}\, \mathsf{A}^{p_1 q_1; \dots; p_k q_k} - e_{p_1 q}\, \mathsf{A}^{pq_1; p_2 q_2; \dots; p_k q_k} - \\ - e_{p_2 q}\, \mathsf{A}^{p_1 q_1; pq_2; \dots; p_k q_k} - \dots - e_{p_k q}\, \mathsf{A}^{p_1 q_1; \dots; p_{k-1} q_{k-1}; pq_k}.$$

Für $k = 1$ ist (14) mit (13) identisch, also richtig. Den allgemeinen Nachweis führen wir durch vollständige Induktion; wir nehmen also (14) für einen gewissen Wert k als richtig an. Dann multiplizieren wir (14) mit $|X|^{-k}$ und differenzieren dann partiell nach x_{sq}. Die dabei auftretenden zweiten Ableitungen von $|X|$ drücken wir vermöge der Formel [3]) durch die ersten aus und erhalten dann nach Multiplikation mit $|X|^{k+1}$:

$$|X| \frac{\partial^2 |X|}{\partial x_{rp} \partial x_{sq}} = \frac{\partial |X|}{\partial x_{rp}} \frac{\partial |X|}{\partial x_{sq}} - \frac{\partial |X|}{\partial x_{rq}} \frac{\partial |X|}{\partial x_{sp}}$$

durch die ersten aus und erhalten dann nach Multiplikation mit $|X|^{k+1}$:

$$|X|^{k+1} \frac{\partial^{k+1} \Phi(X)}{\partial x_{s_1 q_1} \dots \partial x_{s_k q_k} \partial x_{sq}} = \sum_{p_1, \dots, p_k} \frac{\partial |X|}{\partial x_{s_1 p_1}} \dots \frac{\partial |X|}{\partial x_{s_k p_k}} |X| \frac{\partial \Phi(X)}{\partial x_{sq}} \mathsf{A}^{p_1 q_1; \dots; p_k q_k}$$

$$- \sum_{p_1, \dots, p_k} \frac{\partial |X|}{\partial x_{s_1 q}} \frac{\partial |X|}{\partial x_{s p_1}} \frac{\partial |X|}{\partial x_{s_2 p_2}} \dots \frac{\partial |X|}{\partial x_{s_k p_k}} \Phi(X)\, \mathsf{A}^{p_1 q_1; \dots; p_k q_k}$$

$$\dots\dots\dots

oder indem man die Summationsindizes p, p_1 mit p_1, p bezeichnet:

$$\sum_{p_1, \ldots, p_k, p} \frac{\partial |X|}{\partial x_{s_1 p_1}} \frac{\partial |X|}{\partial x_{s_2 p_2}} \cdots \frac{\partial |X|}{\partial x_{s_k p_k}} \frac{\partial |X|}{\partial x_{sp}} \Phi(X)\, e_{p_1 q}\, \mathsf{A}^{p q_1; p_2 q_2; \ldots; p_k q_k}.$$

In entsprechender Weise lassen sich auch die anderen Summen als $(k+1)$-fache Summen schreiben. Wenn man dann die sämtlichen $(k+1)$-fachen Summen unter ein einziges Summenzeichen zusammenfaßt, ergibt sich

$$|X|^{k+1} \frac{\partial^{k+1} \Phi(X)}{\partial x_{s_1 q_1} \cdots \partial x_{s_k q_k} \partial x_{sq}} = \sum_{p_1, \ldots, p_k, p} \frac{\partial |X|}{\partial x_{s_1 p_1}} \cdots \frac{\partial |X|}{\partial x_{s_k p_k}} \frac{\partial |X|}{\partial x_{sp}} \Phi(X)\, \mathsf{A}^{p_1 q_1; \ldots; p_k q_k; pq},$$

wobei $\mathsf{A}^{p_1 q_1; \ldots; p_k q_k; pq}$ gerade durch (15) gegeben ist. Das ist aber die Formel (14) mit $k+1$ an Stelle von k, womit (14) allgemein bewiesen ist.

Aus (14) folgt weiter, wenn man mit $x_{s_1 r_1} \ldots x_{s_k r_k}$ multipliziert und nach $s_1, \ldots, s_k$ summiert, unter Benutzung von (12):

$$\sum_{s_1, \ldots, s_k} \frac{\partial^k \Phi(X)}{\partial x_{s_1 q_1} \ldots \partial x_{s_k q_k}} x_{s_1 r_1} \ldots x_{s_k r_k} = \Phi(X)\, \mathsf{A}^{r_1 q_1; \ldots; r_k q_k}. \tag{16}$$

Nunmehr kann der Satz 8 leicht bewiesen werden. Zunächst ist wegen $\Phi(E) = \mathsf{E}$ die Gleichung $\Phi(X)\Phi(Y) = \Phi(XY)$ mindestens für $Y = E$ richtig. Wenn wir zeigen können, daß infolge des Gleichungssystems (13) und der Forderung $\Phi(E) = \mathsf{E}$ auch für alle partiellen Ableitungen die Formel

$$\left\{ \frac{\partial^k [\Phi(X)\Phi(Y) - \Phi(XY)]}{\partial y_{r_1 q_1} \ldots \partial y_{r_k q_k}} \right\}_{Y = E} = 0 \tag{17}$$

gilt, so hat die Taylorentwicklung der Funktion $\Phi(X)\Phi(Y) - \Phi(XY)$ nach Potenzen der n^2 Größen $y_{rq} - e_{rq}$ lauter Koeffizienten 0, und damit wird der Satz 8 bewiesen sein. Nun ist die zu beweisende Formel (17), wenn wieder $XY = Z$ gesetzt wird, gleichbedeutend mit

$$\Phi(X) \left\{ \frac{\partial^k \Phi(Y)}{\partial y_{r_1 q_1} \ldots \partial y_{r_k q_k}} \right\}_{Y = E} = \sum_{s_1, \ldots, s_k} \left\{ \frac{\partial^k \Phi(Z)}{\partial z_{s_1 q_1} \ldots \partial z_{s_k q_k}} \right\}_{Y = E} x_{s_1 r_1} \ldots x_{s_k r_k},$$

oder also mit

$$\Phi(X) \left\{ \frac{\partial^k \Phi(Y)}{\partial y_{r_1 q_1} \ldots \partial y_{r_k q_k}} \right\}_{Y = E} = \sum_{s_1, \ldots, s_k} \frac{\partial^k \Phi(X)}{\partial x_{s_1 q_1} \ldots \partial x_{s_k q_k}} x_{s_1 r_1} \ldots x_{s_k r_k}. \tag{18}$$

Aus (13) folgt aber, wie wir gesehen haben, die Formel (16) und aus dieser folgt für $X = E$ wegen $\Phi(E) = \mathsf{E}$:

$$\left\{ \frac{\partial^k \Phi(X)}{\partial x_{r_1 q_1} \ldots \partial x_{r_k q_k}} \right\}_{X = E} = \mathsf{A}^{r_1 q_1; \ldots; r_k q_k}. \tag{19}$$

Wenn man diesen Wert von $\mathsf{A}^{r_1 q_1; \ldots; r_k q_k}$ in (16) einsetzt, ergibt sich genau die zu beweisende Formel (18), womit diese und folglich auch der Satz 8 bewiesen ist.

Auch die Integrabilitätsbedingungen des Systems (13) können jetzt leicht angegeben werden. Bekanntlich bestehen sie darin, daß die aus (13) berechneten zweiten Ableitungen

$$\frac{\partial^2 \Phi(X)}{\partial x_{s_1 q_1}\, \partial x_{s_2 q_2}} \quad \text{und} \quad \frac{\partial^2 \Phi(X)}{\partial x_{s_2 q_2}\, \partial x_{s_1 q_1}}$$

für alle Variabelnpaare $x_{s_1 q_1}$ und $x_{s_2 q_2}$ einander gleich sind; für die höheren Ableitungen trifft dann das Entsprechende von selbst zu. Nun lauten die Gleichungen (14) und (16) im Fall $k = 2$:

$$|X|^2 \frac{\partial^2 \Phi(X)}{\partial x_{s_1 q_1}\, \partial x_{s_2 q_2}} = \sum_{p_1, p_2} \frac{\partial |X|}{\partial x_{s_1 p_1}} \frac{\partial |X|}{\partial x_{s_2 p_2}} \Phi(X)\, \mathsf{A}^{p_1 q_1; p_2 q_2},$$

$$\sum_{s_1, s_2} \frac{\partial^2 \Phi(X)}{\partial x_{s_1 q_1}\, \partial x_{s_2 q_2}} x_{s_1 r_1} x_{s_2 r_2} = \Phi(X)\, \mathsf{A}^{r_1 q_1; r_2 q_2}.$$

Notwendig und hinreichend für die Vertauschbarkeit der Differentiationsreihenfolge in allen zweiten Ableitungen ist daher

$$\mathsf{A}^{p_1 q_1; p_2 q_2} = \mathsf{A}^{p_2 q_2; p_1 q_1}$$

und das besagt, wie die Formel (15) für $k = 1$ lehrt, soviel wie

$$\mathsf{A}^{p_2 q_2}\, \mathsf{A}^{p_1 q_1} - e_{p_1 q_2}\, \mathsf{A}^{p_2 q_1} = \mathsf{A}^{p_1 q_1}\, \mathsf{A}^{p_2 q_2} - e_{p_2 q_1}\, \mathsf{A}^{p_1 q_2}.$$

Indem wir statt p_1, q_1, p_2, q_2 einfacher p, q, r, s schreiben, gewinnen wir so den

Satz 9. *Die Integrabilitätsbedingungen des Differentialgleichungssystems* (13) *lauten*:

$$\mathsf{A}^{pq}\, \mathsf{A}^{rs} - \mathsf{A}^{rs}\, \mathsf{A}^{pq} = e_{rq}\, \mathsf{A}^{ps} - e_{ps}\, \mathsf{A}^{rq}$$

für $p, q, r, s = 1, \ldots, n$.

Die in der Umgebung von $X = E$ analytische, also nach Potenzen der n^2 Größen $x_{pq} - e_{pq}$ entwickelbare Lösung $\Phi(X)$ von (13) mit $\Phi(E) = \mathsf{E}$ ist nunmehr eindeutig bestimmt; nach dem Taylorschen Satz ist sie nämlich gleich

$$\Phi(X) = \mathsf{E} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} \Big(\sum_{\substack{p_1, \ldots, p_k \\ q_1, \ldots, q_k}} \Big\{ \frac{\partial^k \Phi(X)}{\partial x_{p_1 q_1} \ldots \partial x_{p_k q_k}} \Big\}_{X = E} \times (x_{p_1 q_1} - e_{p_1 q_1}) \ldots (x_{p_k q_k} - e_{p_k q_k}) \Big). \tag{20}$$

Die dabei auftretenden k-ten Ableitungen für $X = E$ sind die Größen (19) (mit p an Stelle von r), welche sich nach der Rekursionsformel (15) berechnen.

Auf Grund dieser Formel kann man leicht einen Konvergenzbereich angeben. Wenn nämlich für die Elemente der in dem System (13) gegebenen Matrizes A^{pq} die Abschätzung

$$|\alpha_{\varrho\sigma}^{pq}| \leqq c, \quad \text{wo } c \geqq 1, \tag{21}$$

gilt, so gilt für die Elemente von $\mathsf{A}^{p_1q_1;\ \ldots;\ p_kq_k}$ die Abschätzung

$$|\alpha_{\varrho\sigma}^{p_1q_1;\ \ldots;\ p_kq_k}| \leqq \frac{(\nu+k-1)!}{(\nu-1)!}\, c^k. \tag{22}$$

Denn für $k = 1$ ist das nach (21) richtig, und wenn es für ein gewisses k richtig ist, so folgt aus (15)

$$\begin{aligned} |\alpha_{\varrho\sigma}^{p_1q_1;\ \ldots;\ p_kq_k;\ pq}| &\leqq \nu c \frac{(\nu+k-1)!}{(\nu-1)!} c^k + k \frac{(\nu+k-1)!}{(\nu-1)!} c^k \\ &\leqq \frac{(\nu+k)!}{(\nu-1)!} c^{k+1}. \end{aligned}$$

Daher gilt die Formel (22) allgemein, was mit Rücksicht auf (19) besagt, daß jedes Element der Matrix

$$\left\{\frac{\partial^k \Phi(X)}{\partial x_{p_1q_1} \ldots \partial x_{p_kq_k}}\right\}_{X=E}$$

absolut höchstens gleich der rechten Seite von (22) ist. Für die Reihe in (20) hat man also die Majorante

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} \sum_{\substack{p_1,\ \ldots,\ p_k \\ q_1,\ \ldots,\ q_k}} \frac{(\nu+k-1)!}{(\nu-1)!} c^k |x_{p_1q_1} - e_{p_1q_1}| \ldots |x_{p_kq_k} - e_{p_kq_k}|$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \binom{\nu+k-1}{k} c^k \Big(\sum_{p,\,q} |x_{pq} - e_{pq}|\Big)^k = \Big(1 - c \sum_{p,\,q} |x_{pq} - e_{pq}|\Big)^{-\nu} - 1,$$

und es ergibt sich der

Satz 10. *Das Differentialgleichungssystem* (13) *hat, wenn die in Satz* 9 *angegebenen Integrabilitätsbedingungen erfüllt sind, eine und nur eine in der Umgebung von* $X = E$ *analytische Lösung* $\Phi(X)$ *mit* $\Phi(E) = \mathsf{E}$, *und ihre Reihenentwicklung nach Potenzen der* n^2 *Größen* $x_{pq} - e_{pq}$ *konvergiert mindestens für*

$$\sum_{p=1}^{n} \sum_{q=1}^{n} |x_{pq} - e_{pq}| < \frac{1}{c},$$

wobei c *die größte der* $n^2\nu^2 + 1$ *Zahlen* 1 *und* $|\alpha_{\varrho\sigma}^{pq}|$ *ist* ($p, q = 1, \ldots, n$; $\varrho, \sigma = 1, \ldots, \nu$).

Bemerkung. Statt die Funktionalgleichung (5) partiell nach y_{pq} zu differenzieren und dann $Y = E$ zu setzen, kann man ebensogut nach x_{pq}

differenzieren und dann $X = E$ setzen. Dadurch ergibt sich, wenn im Endresultat X statt Y geschrieben wird, analog zu (13) das System

$$|X|\frac{\partial \Phi(X)}{\partial x_{ps}} = \sum_{q=1}^{n} \frac{\partial |X|}{\partial x_{qs}} \mathsf{A}^{pq}\,\Phi(X) \qquad (p, s = 1, \ldots, n), \tag{23}$$

wo A^{pq} wieder durch (10) gegeben ist. Hieran lassen sich nun die entsprechenden Überlegungen anschließen wie an (13). Die Integrabilitätsbedingungen sind die gleichen, und die bei ihrem Erfülltsein eindeutig bestimmte in der Umgebung von $X = E$ analytische Lösung von (23) mit $\Phi(E) = \mathsf{E}$ ist auch Lösung der Gleichung (5). Im übrigen ist aber das System (23) keineswegs mit (13) gleichbedeutend, und das allgemeine Integral von (23) ist ein anderes als das allgemeine Integral von (13), wovon man sich schon im Fall $n = 1$ überzeugen kann[4]). Nur das Integral mit der Nebenbedingung $\Phi(E) = \mathsf{E}$ ist für beide Systeme dasselbe und ist Lösung der Gleichung (5).

§ 4.

Die Fälle $n = 1$ und $\nu = 1$.

Nachdem wir in § 3 bis zur Entwicklung der Lösung unserer Funktionalgleichung (5) in die Taylorsche Reihe nach den n^2 Größen $x_{pq} - e_{pq}$ vorgedrungen sind, ist das Problem im Prinzip bereits erledigt. Es handelt sich aber noch darum, die konstanten Matrizes A^{pq} explizit auf die allgemeinste Weise so anzugeben, daß die Integrabilitätsbedingungen von Satz 9 erfüllt sind, und dann die Lösung in einer handlicheren Form anzugeben als es die besagte Taylorsche Reihe ist.

Sehr einfach sind die Fälle $n = 1$ und $\nu = 1$.

I. Im Fall $n = 1$ hat die Matrix X nur das eine Element x_{11}, wofür wir einfach x schreiben. Ebenso gibt es nur eine Matrix A^{pq}, nämlich A^{11}, wofür wir einfach A schreiben. Das System (13) besteht dann nur aus der einen (gewöhnlichen) Differentialgleichung

$$x\frac{d\Phi(x)}{dx} = \Phi(x)\,\mathsf{A}, \tag{24}$$

bei der es natürlich keine Integrabilitätsbedingungen gibt; die in Satz 9 angegebenen reduzieren sich auf eine Identität. Das allgemeine Integral von (24) ist augenscheinlich

$$\Phi(x) = \Gamma\, x^{\mathsf{A}} = \Gamma\, e^{\mathsf{A}\log x} = \Gamma \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(\mathsf{A}\log x)^k}{k!}, \tag{25}$$

---

[4]) Die allgemeine Lösung von (13) im Fall $n = 1$ ist in Formel (25) gegeben. Die allgemeine Lösung von (23) im Fall $n = 1$ unterscheidet sich davon dadurch, daß die konstante Matrix Γ nicht als vorderer, sondern als hinterer Faktor auftritt.

wo Γ eine willkürliche konstante Matrix ist. Die Forderung $\Phi(E) = \mathsf{E}$ gewinnt für $n = 1$ das Aussehen $\Phi(1) = \mathsf{E}$, und dann folgt aus (25): $\Gamma = \mathsf{E}$. Somit gewinnen wir den

Satz 11. *Die in der Umgebung von $x = 1$ analytischen Lösungen der Funktionalgleichung $\Phi(x)\,\Phi(y) = \Phi(xy)$ mit der Nebenbedingung $\Phi(1) = \mathsf{E}$ sind gegeben durch die Formel*

$$\Phi(x) = x^{\mathsf{A}} = e^{\mathsf{A}\log x} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\mathsf{A}\log x)^k}{k!},$$

wobei A eine willkürliche konstante Matrix ist.

II. Im Fall $\nu = 1$ hat die Matrix $\Phi(X)$ nur das eine Element $\varphi_{11}(X)$, wofür wir einfach $\varphi(X)$ schreiben. Ebenso hat A^{pq} nur das eine Element α_{11}^{pq}, wofür wir α^{pq} schreiben. Das System (13) lautet dann

$$|X| \frac{\partial \varphi(X)}{\partial x_{sq}} = \sum_{p=1}^{n} \frac{\partial |X|}{\partial x_{sp}} \varphi(X)\,\alpha^{pq}. \tag{26}$$

Die Integrabilitätsbedingungen (Satz 9) reduzieren sich auf

$$e_{rq}\,\alpha^{ps} = e_{ps}\,\alpha^{rq} \qquad (p, q, r, s = 1, \ldots, n). \tag{27}$$

Speziell für $r = q = 1$ folgt hieraus

$$\alpha^{ps} = e_{ps}\,\alpha^{11} \qquad (p, s = 1, \ldots, n) \tag{28}$$

und umgekehrt folgt aus (28) sogleich auch wieder (27), so daß die Gleichungen (28) bereits die vollen Integrabilitätsbedingungen sind. Hiernach sind alle α^{ps} bereits durch das willkürlich bleibende α^{11} bestimmt, und die Differentialgleichungen (26) reduzieren sich, wenn wir statt α^{11} einfach α schreiben, auf

$$|X| \frac{\partial \varphi(X)}{\partial x_{sq}} = \frac{\partial |X|}{\partial x_{sq}} \varphi(X)\,\alpha \qquad (s, q = 1, \ldots, n).$$

Das besagt soviel wie

$$\frac{\partial \log [\varphi(X)\,|X|^{-\alpha}]}{\partial x_{sq}} = 0 \qquad (s, q = 1, \ldots, n).$$

Hiernach ist $\varphi(X)\,|X|^{-\alpha}$ eine Konstante, und da die Forderung $\Phi(E) = \mathsf{E}$ für $\nu = 1$ das Aussehen $\varphi(E) = 1$ hat, ist die Konstante gleich 1. Somit ergibt sich

Satz 12. *Die in der Umgebung von $X = E$ analytischen Lösungen der Funktionalgleichung $\varphi(X)\,\varphi(Y) = \varphi(XY)$ mit der Nebenbedingung $\varphi(E) = 1$ sind gegeben durch die Formel*

$$\varphi(X) = |X|^{\alpha} = e^{\alpha \log |X|},$$

wo α eine willkürliche Konstante ist.

§ 5.

Reduktion der Integrabilitätsbedingungen.

Im folgenden scheiden die erledigten Fälle $n = 1$ und $\nu = 1$ aus[5]). Die Integrabilitätsbedingungen lauten nach Satz 9

$$\mathsf{A}^{pq}\mathsf{A}^{rs} - \mathsf{A}^{rs}\mathsf{A}^{pq} = e_{rq}\mathsf{A}^{ps} - e_{ps}\mathsf{A}^{rq}. \tag{29}$$

Speziell für $p = s = 1$ folgt daraus

$$\text{I.}\qquad \mathsf{A}^{rq} = \mathsf{A}^{r1}\mathsf{A}^{1q} - \mathsf{A}^{1q}\mathsf{A}^{r1} + e_{rq}\mathsf{A}^{11} \qquad (r, q = 1, \ldots, n).$$

Dadurch sind alle n^2 Matrizes A^{rq} bereits durch die $2n - 1$ Matrizes

$$\mathsf{A}^{11},\ \mathsf{A}^{21},\ \ldots,\ \mathsf{A}^{n1},$$
$$\mathsf{A}^{12},\ \ldots,\ \mathsf{A}^{1n}$$

ausgedrückt. Zwischen diesen bestehen aber noch Beziehungen. Zunächst folgt aus I für $q = 1$, $r > 1$ bzw. für $r = 1$, $q > 1$:

$$\text{II.}\qquad \mathsf{A}^{r1} = \mathsf{A}^{r1}\mathsf{A}^{11} - \mathsf{A}^{11}\mathsf{A}^{r1} \qquad (r = 2, \ldots, n),$$

$$\text{III.}\qquad \mathsf{A}^{1q} = \mathsf{A}^{11}\mathsf{A}^{1q} - \mathsf{A}^{1q}\mathsf{A}^{11} \qquad (q = 2, \ldots, n).$$

Die Formel I ist für $q = r = 1$ eine Identität; für $q = 1$, $r > 1$ bzw. für $q > 1$, $r = 1$ deckt sie sich mit II bzw. III, weshalb es in Satz 13 genügen wird, sie für $q > 1$, $r > 1$ aufzuschreiben.

Weiter folgt aus (29) für $q = s = 1$ bzw. für $p = r = 1$:

$$\text{IV.}\qquad \mathsf{A}^{p1}\mathsf{A}^{r1} = \mathsf{A}^{r1}\mathsf{A}^{p1} \qquad (p, r = 2, \ldots, n),$$

$$\text{V.}\qquad \mathsf{A}^{1q}\mathsf{A}^{1s} = \mathsf{A}^{1s}\mathsf{A}^{1q} \qquad (q, s = 2, \ldots, n).$$

Die Beziehungen IV und V brauchen in Satz 13 aus Symmetriegründen nur für $p < r$ bzw. für $q < s$ vermerkt zu werden. Sie kommen dann natürlich nur im Fall $n \geqq 3$ in Betracht.

Schließlich folgt aus (29) für $s = 1$ bzw. für $r = 1$

$$\mathsf{A}^{pq}\mathsf{A}^{r1} - \mathsf{A}^{r1}\mathsf{A}^{pq} = e_{rq}\mathsf{A}^{p1} \qquad (p, q, r = 2, \ldots, n)$$
$$\mathsf{A}^{pq}\mathsf{A}^{1s} - \mathsf{A}^{1s}\mathsf{A}^{pq} = -e_{ps}\mathsf{A}^{1q} \qquad (p, q, s = 2, \ldots, n),$$

wofür man mit Rücksicht auf I auch schreiben kann:

$$(\mathsf{A}^{p1}\mathsf{A}^{1q} - \mathsf{A}^{1q}\mathsf{A}^{p1} + e_{pq}\mathsf{A}^{11})\,\mathsf{A}^{r1} - \mathsf{A}^{r1}(\mathsf{A}^{p1}\mathsf{A}^{1q} - \mathsf{A}^{1q}\mathsf{A}^{p1} + e_{pq}\mathsf{A}^{11}) = e_{rq}\mathsf{A}^{p1},$$
$$(\mathsf{A}^{p1}\mathsf{A}^{1q} - \mathsf{A}^{1q}\mathsf{A}^{p1} + e_{pq}\mathsf{A}^{11})\,\mathsf{A}^{1s} - \mathsf{A}^{1s}(\mathsf{A}^{p1}\mathsf{A}^{1q} - \mathsf{A}^{1q}\mathsf{A}^{p1} + e_{pq}\mathsf{A}^{11}) = -e_{ps}\mathsf{A}^{1q},$$

[5]) Für $\nu = 1$ bleibt allerdings die ganze Rechnung in Kraft. Sie besteht aber zum größten Teil aus Trivialitäten, weil für einreihige Matrizes trivialerweise das kommutative Gesetz der Multiplikation gilt.

und endlich mit Rücksicht auf II und III:

$$\text{VI.}\quad (\mathsf{A}^{p1}\mathsf{A}^{1q} - \mathsf{A}^{1q}\mathsf{A}^{p1})\,\mathsf{A}^{r1} - \mathsf{A}^{r1}(\mathsf{A}^{p1}\mathsf{A}^{1q} - \mathsf{A}^{1q}\mathsf{A}^{p1}) = e_{rq}\mathsf{A}^{p1} + e_{pq}\mathsf{A}^{r1} \quad (p, q, r = 2, \ldots, n),$$

$$\text{VII.}\quad \mathsf{A}^{1s}(\mathsf{A}^{p1}\mathsf{A}^{1q} - \mathsf{A}^{1q}\mathsf{A}^{p1}) - (\mathsf{A}^{p1}\mathsf{A}^{1q} - \mathsf{A}^{1q}\mathsf{A}^{p1})\,\mathsf{A}^{1s} = e_{ps}\mathsf{A}^{1q} + e_{pq}\mathsf{A}^{1s} \quad (p, q, s = 2, \ldots, n).$$

Weitere Beziehungen sind nicht erforderlich. Um das einzusehen, müssen wir zeigen, daß aus den Beziehungen I bis VII bereits die Gleichung (29) für beliebige Indizes folgt. Zu dem Zweck leiten wir zuerst einige Folgerungen aus I bis VII her. Aus II und III folgt für $q \geqq 2$, $r \geqq 2$

$$\begin{aligned}\mathsf{A}^{r1}\mathsf{A}^{1q} &= (\mathsf{A}^{r1}\mathsf{A}^{11} - \mathsf{A}^{11}\mathsf{A}^{r1})\,\mathsf{A}^{1q}\\ &= \mathsf{A}^{r1}\mathsf{A}^{11}\mathsf{A}^{1q} - \mathsf{A}^{11}\mathsf{A}^{r1}\mathsf{A}^{1q}\\ &= \mathsf{A}^{r1}(\mathsf{A}^{1q}\mathsf{A}^{11} + \mathsf{A}^{1q}) - \mathsf{A}^{11}\mathsf{A}^{r1}\mathsf{A}^{1q},\end{aligned}$$

oder also

$$\text{VIII.}\qquad \mathsf{A}^{r1}\mathsf{A}^{1q}\mathsf{A}^{11} = \mathsf{A}^{11}\mathsf{A}^{r1}\mathsf{A}^{1q} \qquad (q, r = 2, \ldots, n),$$

und eine analoge Rechnung führt zu

$$\text{IX.}\qquad \mathsf{A}^{1q}\mathsf{A}^{r1}\mathsf{A}^{11} = \mathsf{A}^{11}\mathsf{A}^{1q}\mathsf{A}^{r1} \qquad (q, r = 2, \ldots, n).$$

Nach I ist

$$\mathsf{A}^{pq}\mathsf{A}^{r1} - \mathsf{A}^{r1}\mathsf{A}^{pq} = (\mathsf{A}^{p1}\mathsf{A}^{1q} - \mathsf{A}^{1q}\mathsf{A}^{p1} + e_{pq}\mathsf{A}^{11})\,\mathsf{A}^{r1} - \mathsf{A}^{r1}(\mathsf{A}^{p1}\mathsf{A}^{1q} - \mathsf{A}^{1q}\mathsf{A}^{p1} + e_{pq}\mathsf{A}^{11}),$$

was für $p > 1$, $q > 1$, $r > 1$ nach VI und II gleich

$$e_{rq}\mathsf{A}^{p1} + e_{pq}\mathsf{A}^{r1} - e_{pq}\mathsf{A}^{r1} = e_{rq}\mathsf{A}^{p1},$$

dagegen für $p > 1$, $q > 1$, $r = 1$ wegen VIII und IX gleich 0 ist. Man hat also die beiden Folgerungen

$$\text{X.}\qquad \mathsf{A}^{pq}\mathsf{A}^{r1} - \mathsf{A}^{r1}\mathsf{A}^{pq} = e_{rq}\mathsf{A}^{p1} \qquad (p, q, r = 2, \ldots, n)$$

$$\text{XI.}\qquad \mathsf{A}^{pq}\mathsf{A}^{11} = \mathsf{A}^{11}\mathsf{A}^{pq} \qquad (p, q = 2, \ldots, n).$$

Analog ist wegen I auch

$$\mathsf{A}^{pq}\mathsf{A}^{1s} - \mathsf{A}^{1s}\mathsf{A}^{pq} = (\mathsf{A}^{p1}\mathsf{A}^{1q} - \mathsf{A}^{1q}\mathsf{A}^{p1} + e_{pq}\mathsf{A}^{11})\,\mathsf{A}^{1s} - \mathsf{A}^{1s}(\mathsf{A}^{p1}\mathsf{A}^{1q} - \mathsf{A}^{1q}\mathsf{A}^{p1} + e_{pq}\mathsf{A}^{11}),$$

was für $p > 1$, $q > 1$, $s > 1$ nach VII und III gleich

$$-e_{ps}\mathsf{A}^{1q} - e_{pq}\mathsf{A}^{1s} + e_{pq}\mathsf{A}^{1s} = -e_{ps}\mathsf{A}^{1q}$$

ist. Man hat also die weitere Folgerung

$$\text{XII.}\qquad \mathsf{A}^{pq}\mathsf{A}^{1s} - \mathsf{A}^{1s}\mathsf{A}^{pq} = -e_{ps}\mathsf{A}^{1q} \qquad (p, q, s = 2, \ldots, n).$$

Eine letzte Folgerung bekommt man, wenn man VI hinten mit A^{1s} multipliziert, VII hinten mit A^{r1}, sodann VI vorn mit $-\mathsf{A}^{1s}$, VII vorn mit $-\mathsf{A}^{r1}$, worauf man die vier so entstehenden Gleichungen addiert. So ergibt sich

XIII.
$$\begin{aligned}&(\mathsf{A}^{p1}\mathsf{A}^{1q} - \mathsf{A}^{1q}\mathsf{A}^{p1})(\mathsf{A}^{r1}\mathsf{A}^{1s} - \mathsf{A}^{1s}\mathsf{A}^{r1}) - \\ &\quad - (\mathsf{A}^{r1}\mathsf{A}^{1s} - \mathsf{A}^{1s}\mathsf{A}^{r1})(\mathsf{A}^{p1}\mathsf{A}^{1q} - \mathsf{A}^{1q}\mathsf{A}^{p1}) \\ &= e_{rq}(\mathsf{A}^{p1}\mathsf{A}^{1s} - \mathsf{A}^{1s}\mathsf{A}^{p1}) - e_{ps}(\mathsf{A}^{r1}\mathsf{A}^{1q} - \mathsf{A}^{1q}\mathsf{A}^{r1}).\end{aligned}$$

Nunmehr genügt es, zu zeigen, daß (29) eine Folge der Formeln I bis XIII ist. Wir unterscheiden verschiedene Fälle.

1. Sind in (29) alle vier Indizes gleich 1, so ist (29) eine Identität, also nichts mehr zu beweisen.

2. Ist in (29) nur *ein* Index größer als 1, und zwar ein vorderer bzw. hinterer, so kann man aus Symmetriegründen annehmen, daß es der Index r bzw. q ist. Dann hat (29) das Aussehen

$$\mathsf{A}^{11}\mathsf{A}^{r1} - \mathsf{A}^{r1}\mathsf{A}^{11} = -\mathsf{A}^{r1} \quad \text{bzw.} \quad \mathsf{A}^{1q}\mathsf{A}^{11} - \mathsf{A}^{11}\mathsf{A}^{1q} = -\mathsf{A}^{1q},$$

und das deckt sich mit II bzw. III.

3. Sind in (29) zwei Indizes größer als 1, und zwar die zwei vorderen bzw. die zwei hinteren, so hat (29) das Aussehen

$$\mathsf{A}^{p1}\mathsf{A}^{r1} - \mathsf{A}^{r1}\mathsf{A}^{p1} = 0 \quad \text{bzw.} \quad \mathsf{A}^{1q}\mathsf{A}^{1s} - \mathsf{A}^{1s}\mathsf{A}^{1q} = 0,$$

und das deckt sich mit IV bzw. V.

4. Sind in (29) zwei Indizes größer als 1, und zwar ein vorderer und ein hinterer, so kann man annehmen, daß es die Indizes r und q oder die Indizes p und q sind. Dann hat (29) das Aussehen

$$\mathsf{A}^{1q}\mathsf{A}^{r1} - \mathsf{A}^{r1}\mathsf{A}^{1q} = e_{rq}\mathsf{A}^{11} - \mathsf{A}^{rq} \quad \text{bzw.} \quad \mathsf{A}^{pq}\mathsf{A}^{11} - \mathsf{A}^{11}\mathsf{A}^{pq} = 0,$$

und das deckt sich mit I bzw. XI.

5. Ist in (29) nur *ein* Index gleich 1 und zwar ein vorderer bzw. hinterer, so kann man annehmen, daß es der Index r bzw. s ist. Dann hat (29) das Aussehen

$$\mathsf{A}^{pq}\mathsf{A}^{1s} - \mathsf{A}^{1s}\mathsf{A}^{pq} = -e_{ps}\mathsf{A}^{1q} \quad \text{bzw.} \quad \mathsf{A}^{pq}\mathsf{A}^{r1} - \mathsf{A}^{r1}\mathsf{A}^{pq} = e_{rq}\mathsf{A}^{p1},$$

und das deckt sich mit XII bzw. X.

6. Jetzt bleibt nur noch der Fall, daß in (29) alle vier Indizes größer als 1 sind. Dann hat (29) wegen I das Aussehen

$$\begin{aligned}&(\mathsf{A}^{p1}\mathsf{A}^{1q} - \mathsf{A}^{1q}\mathsf{A}^{p1} + e_{pq}\mathsf{A}^{11})(\mathsf{A}^{r1}\mathsf{A}^{1s} - \mathsf{A}^{1s}\mathsf{A}^{r1} + e_{rs}\mathsf{A}^{11}) - \\ &- (\mathsf{A}^{r1}\mathsf{A}^{1s} - \mathsf{A}^{1s}\mathsf{A}^{r1} + e_{rs}\mathsf{A}^{11})(\mathsf{A}^{p1}\mathsf{A}^{1q} - \mathsf{A}^{1q}\mathsf{A}^{p1} + e_{pq}\mathsf{A}^{11}) \\ &= e_{rq}(\mathsf{A}^{p1}\mathsf{A}^{1s} - \mathsf{A}^{1s}\mathsf{A}^{p1} + e_{ps}\mathsf{A}^{11}) - e_{ps}(\mathsf{A}^{r1}\mathsf{A}^{1q} - \mathsf{A}^{1q}\mathsf{A}^{r1} + e_{rq}\mathsf{A}^{11}).\end{aligned}$$

Hier fällt nun A^{11} mit Rücksicht auf VIII und IX völlig heraus und die dann verbleibende Formel deckt sich mit XIII.

Damit ist alles bewiesen, und wir gewinnen, wenn wir in den Formeln I bis VII die Indizes teilweise mit anderen Buchstaben bezeichnen, den

Satz 13. *Den in Satz 9 angegebenen Integrabilitätsbedingungen des Differentialgleichungssystems* (13) *läßt sich die folgende Gestalt geben: Die Bedingungen bestehen darin, daß durch die* $2n-1$ *Matrizes*

$$\mathsf{A}^{11}, \mathsf{A}^{21}, \ldots, \mathsf{A}^{n1}, \mathsf{A}^{12}, \ldots, \mathsf{A}^{1n}$$

die $(n-1)^2$ *anderen sich ausdrücken durch die Formel*

$$\text{I.} \qquad \mathsf{A}^{pq} = \mathsf{A}^{p1}\mathsf{A}^{1q} - \mathsf{A}^{1q}\mathsf{A}^{p1} + e_{pq}\mathsf{A}^{11} \qquad (p, q = 2, \ldots, n),$$

und daß zwischen den $2n-1$ *erstgenannten Matrizes noch die folgenden Beziehungen bestehen:*

$$\text{II.} \qquad \mathsf{A}^{p1} = \mathsf{A}^{p1}\mathsf{A}^{11} - \mathsf{A}^{11}\mathsf{A}^{p1} \qquad (p = 2, \ldots, n),$$

$$\text{III.} \qquad \mathsf{A}^{1p} = \mathsf{A}^{11}\mathsf{A}^{1p} - \mathsf{A}^{1p}\mathsf{A}^{11} \qquad (p = 2, \ldots, n),$$

$$\text{IV.} \qquad \mathsf{A}^{p1}\mathsf{A}^{q1} = \mathsf{A}^{q1}\mathsf{A}^{p1} \qquad (1 < p < q \leqq n),$$

$$\text{V.} \qquad \mathsf{A}^{1p}\mathsf{A}^{1q} = \mathsf{A}^{1q}\mathsf{A}^{1p} \qquad (1 < p < q \leqq n),$$

$$\text{VI.} \qquad (\mathsf{A}^{p1}\mathsf{A}^{1q} - \mathsf{A}^{1q}\mathsf{A}^{p1})\mathsf{A}^{r1} - \mathsf{A}^{r1}(\mathsf{A}^{p1}\mathsf{A}^{1q} - \mathsf{A}^{1q}\mathsf{A}^{p1}) = e_{rq}\mathsf{A}^{p1} + e_{pq}\mathsf{A}^{r1} \qquad (p, q, r = 2, \ldots, n),$$

$$\text{VII.} \qquad \mathsf{A}^{1r}(\mathsf{A}^{p1}\mathsf{A}^{1q} - \mathsf{A}^{1q}\mathsf{A}^{p1}) - (\mathsf{A}^{p1}\mathsf{A}^{1q} - \mathsf{A}^{1q}\mathsf{A}^{p1})\mathsf{A}^{1r} = e_{pr}\mathsf{A}^{1q} + e_{pq}\mathsf{A}^{1r} \qquad (p, q, r = 2, \ldots, n).$$

Bemerkung. Die Vorzugsstellung, die in Satz 13 dem Index 1 eingeräumt ist, kann man ebensogut jedem anderen der Indizes $1, 2, \ldots, n$ einräumen und dadurch zu entsprechenden anderen Formulierungen der Integrabilitätsbedingungen gelangen[6]).

§ 6.

Einige Folgerungen aus den Integrabilitätsbedingungen.

Es sei $\mathsf{A}^{12} = 0$. Aus VII für $p = q = 2$ folgt dann

$$\mathsf{A}^{1r} = 0 \qquad (r = 2, \ldots, n).$$

Aus VI für $p = q = 2$ folgt

$$e_{r2}\mathsf{A}^{21} + \mathsf{A}^{r1} = 0 \qquad (r = 2, \ldots, n),$$

also auch

$$\mathsf{A}^{r1} = 0 \qquad (r = 2, \ldots, n).$$

[6]) Daß keiner der Indizes $1, 2, \ldots, n$ vor einem anderen eine Vorzugsstellung hat, ergibt sich aus Satz 3 und der unmittelbar daran angeschlossenen Bemerkung.

Aus I folgt dann weiter

$$\mathsf{A}^{pq} = e_{pq}\,\mathsf{A}^{11} \qquad (p, q = 2, \ldots, n).$$

Daher sind alle A^{pq} für $p \neq q$ gleich 0 und alle A^{pp} sind einander gleich. Wir hatten angenommen, daß $\mathsf{A}^{12} = 0$ ist. Da aber das Indexpaar 1, 2 in keiner Weise vor einem anderen ausgezeichnet ist[7]), so können wir schließen, daß, wenn A^{pq} für irgendein Paar verschiedener Indizes p, q gleich 0 ist, das für jedes Paar gilt und daß dann alle A^{pp} einander gleich sind, etwa gleich A. Das System (13) lautet dann

$$|X|\,\frac{\partial\,\Phi(X)}{\partial\,x_{sq}} = \frac{\partial\,|X|}{\partial\,x_{sq}}\,\Phi(X)\,\mathsf{A}.$$

Dieses System besagt, wenn man

$$|X|^{\mathsf{A}} = e^{\mathsf{A}\log|X|} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\mathsf{A}\log|X|)^k}{k!} = \Psi(X),$$

also

$$|X|^{-\mathsf{A}} = e^{-\mathsf{A}\log|X|} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-\mathsf{A}\log|X|)^k}{k!} = [\Psi(X)]^{-1}$$

setzt, nach hinterer Multiplikation mit $[\Psi(X)]^{-1}$ soviel wie

$$|X|\,\frac{\partial\,\{\Phi(X)\,[\Psi(X)]^{-1}\}}{\partial\,x_{sq}} = 0.$$

Somit ist $\Phi(X)\,[\Psi(X)]^{-1}$ eine konstante Matrix Γ, also

$$\Phi(X) = \Gamma\,\Psi(X).$$

Wegen $\Phi(E) = \mathsf{E}$ muß $\Gamma = \mathsf{E}$ sein, und man gewinnt mit Rücksicht auf die in (10) gegebene Bedeutung der A^{pq} den

Satz 14. *Wenn für eine in der Umgebung von $X = E$ analytische Lösung der Gleichung* (5) $\Phi(E) = \mathsf{E}$ *ist und wenn die Matrix*

$$\mathsf{A}^{pq} = \left\{\frac{\partial\,\Phi(X)}{\partial\,x_{pq}}\right\}_{X=E}$$

für ein Paar verschiedener Indizes p, q gleich 0 ist, so ist $\Phi(X)$ notwendig die bereits in Satz 5 angegebene Lösung

$$\Phi(X) = |X|^{\mathsf{A}} = e^{\mathsf{A}\log|X|} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\mathsf{A}\log|X|)^k}{k!} \quad \textit{mit} \quad \mathsf{A} = \mathsf{A}^{11}.$$

Nunmehr wollen wir die Gestalt der Matrizes A^{pq} auf Grund der in Satz 13 ihnen auferlegten Bedingungen näher untersuchen. Wenn wir statt

---

[7]) Das ergibt sich aus der ursprünglichen Formulierung der Integrabilitätsbedingungen in Satz 9 oder auch aus Satz 3 und der unmittelbar daran angeschlossenen Bemerkung.

der Lösung $\Phi(X)$ von (5) die äquivalente Lösung $\Gamma^{-1}\Phi(X)\Gamma$ betrachten, so tritt an Stelle von $\mathsf{A}^{pq} = \left\{\frac{\partial \Phi(X)}{\partial x_{pq}}\right\}_{X=E}$ die Matrix

$$\Gamma^{-1}\left\{\frac{\partial \Phi(X)}{\partial x_{pq}}\right\}_{X=E}\Gamma = \Gamma^{-1}\mathsf{A}^{pq}\Gamma.$$

Nun läßt sich Γ so wählen, daß etwa $\Gamma^{-1}\mathsf{A}^{11}\Gamma$ eine den Elementarteilern von $\mathsf{A}^{11} - \lambda\mathsf{E}$ entsprechende Kästchenmatrix ist, bei einfachen Elementarteilern also eine reine Diagonalmatrix. Es bedeutet daher keine Beschränkung der Allgemeinheit, wenn wir A^{11} von vornherein als Kästchenmatrix annehmen; das wollen wir tun. Sind[8])

$$(\lambda - \alpha_1)^{\nu_1}, \quad (\lambda - \alpha_2)^{\nu_2}, \ldots, (\lambda - \alpha_\mu)^{\nu_\mu}$$

die Elementarteiler von $\mathsf{A}^{11} - \lambda\mathsf{E}$, wobei dann $\nu_1 + \nu_2 + \cdots + \nu_\mu = \nu$ ist, so setzen wir demgemäß

$$\mathsf{A}^{11} = \begin{pmatrix} \mathfrak{A}^1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \mathfrak{A}^2 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & \mathfrak{A}^\mu \end{pmatrix}, \tag{30}$$

wo die Nullen für rechteckige Nullmatrizes stehen und wo $\mathfrak{A}^\varrho$ im Fall $\nu_\varrho = 1$ einfach die einreihige Matrix α_ϱ, für $\nu_\varrho > 1$ aber die folgende ν_ϱ-reihige Matrix ist:

$$\mathfrak{A}^\varrho = \begin{pmatrix} \alpha_\varrho & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 1 & \alpha_\varrho & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \alpha_\varrho & \ldots & 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & & 1 & \alpha_\varrho \end{pmatrix}. \tag{31}$$

Machen wir dementsprechend für $p = 2, \ldots, n$ den Ansatz

$$\mathsf{A}^{p1} = \begin{pmatrix} \mathfrak{B}^{p11} & \ldots & \mathfrak{B}^{p1\mu} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \mathfrak{B}^{p\mu 1} & \ldots & \mathfrak{B}^{p\mu\mu} \end{pmatrix}, \qquad \mathsf{A}^{1p} = \begin{pmatrix} \mathfrak{C}^{p11} & \ldots & \mathfrak{C}^{p1\mu} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \mathfrak{C}^{p\mu 1} & \ldots & \mathfrak{C}^{p\mu\mu} \end{pmatrix}, \tag{32}$$

wo $\mathfrak{B}^{p\varrho\sigma}$ und $\mathfrak{C}^{p\varrho\sigma}$ Matrizes mit ν_ϱ Zeilen und ν_σ Spalten sind, so nehmen die Bedingungen II und III in Satz 13 die folgende Gestalt an:

$$\begin{pmatrix} \mathfrak{B}^{p11} & \ldots & \mathfrak{B}^{p1\mu} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \mathfrak{B}^{p\mu 1} & \ldots & \mathfrak{B}^{p\mu\mu} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathfrak{B}^{p11}\mathfrak{A}^1 & \ldots & \mathfrak{B}^{p1\mu}\mathfrak{A}^\mu \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \mathfrak{B}^{p\mu 1}\mathfrak{A}^1 & \ldots & \mathfrak{B}^{p\mu\mu}\mathfrak{A}^\mu \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \mathfrak{A}^1\mathfrak{B}^{p11} & \ldots & \mathfrak{A}^1\mathfrak{B}^{p1\mu} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \mathfrak{A}^\mu\mathfrak{B}^{p\mu 1} & \ldots & \mathfrak{A}^\mu\mathfrak{B}^{p\mu\mu} \end{pmatrix}.$$

$$\begin{pmatrix} \mathfrak{C}^{p11} & \ldots & \mathfrak{C}^{p1\mu} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \mathfrak{C}^{p\mu 1} & \ldots & \mathfrak{C}^{p\mu\mu} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathfrak{A}^1\mathfrak{C}^{p11} & \ldots & \mathfrak{A}^1\mathfrak{C}^{p1\mu} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \mathfrak{A}^\mu\mathfrak{C}^{p\mu 1} & \ldots & \mathfrak{A}^\mu\mathfrak{C}^{p\mu\mu} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \mathfrak{C}^{p11}\mathfrak{A}^1 & \ldots & \mathfrak{C}^{p1\mu}\mathfrak{A}^\mu \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \mathfrak{C}^{p\mu 1}\mathfrak{A}^1 & \ldots & \mathfrak{C}^{p\mu\mu}\mathfrak{A}^\mu \end{pmatrix}.$$

[8]) Die α_ϱ brauchen natürlich keineswegs alle voneinander verschieden zu sein.

Also ist

(33) $$\mathfrak{B}^{\rho\varrho\sigma} = \mathfrak{B}^{\rho\varrho\sigma}\mathfrak{A}^{\sigma} - \mathfrak{A}^{\varrho}\mathfrak{B}^{\rho\varrho\sigma} \qquad (\varrho, \sigma = 1, \ldots, \mu),$$

(34) $$\mathfrak{C}^{\rho\varrho\sigma} = \mathfrak{A}^{\varrho}\mathfrak{C}^{\rho\varrho\sigma} - \mathfrak{C}^{\rho\varrho\sigma}\mathfrak{A}^{\sigma} \qquad (\varrho, \sigma = 1, \ldots, \mu).$$

Geht man von den Matrizes zu ihren Elementen über, so besagen diese Formeln

$$\mathfrak{b}_{\varkappa\lambda}^{\rho\varrho\sigma} = \mathfrak{b}_{\varkappa\lambda}^{\rho\varrho\sigma}\alpha_{\sigma} + \mathfrak{b}_{\varkappa,\lambda+1}^{\rho\varrho\sigma} - \mathfrak{b}_{\varkappa-1,\lambda}^{\rho\varrho\sigma} - \alpha_{\varrho}\mathfrak{b}_{\varkappa\lambda}^{\rho\varrho\sigma},$$

$$\mathfrak{c}_{\varkappa\lambda}^{\rho\varrho\sigma} = \mathfrak{c}_{\varkappa-1,\lambda}^{\rho\varrho\sigma} + \alpha_{\varrho}\mathfrak{c}_{\varkappa\lambda}^{\rho\varrho\sigma} - \mathfrak{c}_{\varkappa\lambda}^{\rho\varrho\sigma}\alpha_{\sigma} - \mathfrak{c}_{\varkappa,\lambda+1}^{\rho\varrho\sigma},$$

oder etwas anders geschrieben:

(35) $$(1-\alpha_{\sigma}+\alpha_{\varrho})\,\mathfrak{b}_{\varkappa\lambda}^{\rho\varrho\sigma} = \mathfrak{b}_{\varkappa,\lambda+1}^{\rho\varrho\sigma} - \mathfrak{b}_{\varkappa-1,\lambda}^{\rho\varrho\sigma} \quad (\varkappa = 1, \ldots, \nu_{\varrho};\ \lambda = 1, \ldots, \nu_{\sigma}),$$

(36) $$(1-\alpha_{\varrho}+\alpha_{\sigma})\,\mathfrak{c}_{\varkappa\lambda}^{\rho\varrho\sigma} = \mathfrak{c}_{\varkappa-1,\lambda}^{\rho\varrho\sigma} - \mathfrak{c}_{\varkappa,\lambda+1}^{\rho\varrho\sigma} \quad (\varkappa = 1, \ldots, \nu_{\varrho};\ \lambda = 1, \ldots, \nu_{\sigma}).$$

Dabei sind auf der rechten Seite diejenigen $\mathfrak{b}$ und $\mathfrak{c}$, bei denen der erste untere Index gleich 0 oder der zweite untere Index gleich $\nu_{\sigma}+1$ ist, durch 0 zu ersetzen.

Wenn nun $\alpha_{\sigma} - \alpha_{\varrho} \neq 1$ ist, was insbesondere für $\sigma = \varrho$ zutrifft, so ist nach (35) zunächst $\mathfrak{b}_{1\,\nu_{\sigma}}^{\rho\varrho\sigma} = 0$, und dann folgt aus (35) weiter der Reihe nach

$$\begin{aligned}
&\mathfrak{b}_{2\,\nu_{\sigma}}^{\rho\varrho\sigma} = 0, && \ldots, && \mathfrak{b}_{\nu_{\varrho}\,\nu_{\sigma}}^{\rho\varrho\sigma} = 0,\\
\mathfrak{b}_{1,\nu_{\sigma}-1}^{\rho\varrho\sigma} = 0, \quad &\mathfrak{b}_{2,\nu_{\sigma}-1}^{\rho\varrho\sigma} = 0, && \ldots, && \mathfrak{b}_{\nu_{\varrho},\nu_{\sigma}-1}^{\rho\varrho\sigma} = 0,\\
&\ldots\ldots\ldots

Nach (40) kann man dafür schreiben

$$b^{p\varrho\sigma}_{-\lambda} = 0 \quad \text{für } \lambda = 1, 2, \ldots, \nu_\sigma - 1,$$

$$b^{p\varrho\sigma}_{\varkappa-1-\nu_\sigma} = 0 \quad \text{für } \varkappa = 2, 3, \ldots, \nu_\varrho,$$

oder beide Formeln zusammenfassend:

$$b^{p\varrho\sigma}_{\iota} = 0 \text{ für } 1 - \nu_\sigma \leqq \iota \leqq \text{Max}\,(-1, \nu_\varrho - 1 - \nu_\sigma). \tag{41}$$

Die anderen $b^{p\varrho\sigma}_{\iota}$, also die für

$$\text{Max}\,(-1, \nu_\varrho - 1 - \nu_\sigma) < \iota \leqq \nu_\varrho - 1,$$

bleiben willkürlich. Ihre Anzahl ist bei festem p, ϱ, σ gleich $\text{Min}\,(\nu_\varrho, \nu_\sigma)$.

Analog schließt man aus (36)

$$c^{p\varrho\sigma}_{\varkappa\lambda} = c^{p\varrho\sigma}_{\varkappa-\lambda} \quad \text{für } \alpha_\varrho - \alpha_\sigma = 1,$$

wobei dann

$$c^{p\varrho\sigma}_{\iota} = 0 \quad \text{für } 1 - \nu_\sigma \leqq \iota \leqq \text{Max}\,(-1, \nu_\varrho - 1 - \nu_\sigma)$$

ist, während die anderen $c^{p\varrho\sigma}_{\iota}$, also die für

$$\text{Max}\,(-1, \nu_\varrho - 1 - \nu_\sigma) < \iota \leqq \nu_\varrho - 1$$

willkürlich bleiben; ihre Anzahl ist bei festem p, ϱ, σ gleich $\text{Min}\,(\nu_\varrho, \nu_\sigma)$.

Somit gewinnen wir den

Satz 15. *Nimmt man* A^{11} *als Kästchenmatrix an*:

$$\mathsf{A}^{11} = \begin{pmatrix} \mathfrak{A}^1 & 0 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & \mathfrak{A}^\mu \end{pmatrix}.$$

bezeichnet man mit α_ϱ *und* ν_ϱ *das Diagonalelement und die Zeilenzahl des Kästchens* $\mathfrak{A}_\varrho$ *und setzt dementsprechend*

$$\mathsf{A}^{p1} = \begin{pmatrix} \mathfrak{B}^{p11} & \ldots & \mathfrak{B}^{p1\mu} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \mathfrak{B}^{p\mu 1} & \ldots & \mathfrak{B}^{p\mu\mu} \end{pmatrix}, \qquad \mathsf{A}^{1p} = \begin{pmatrix} \mathfrak{C}^{p11} & \ldots & \mathfrak{C}^{p1\mu} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \mathfrak{C}^{p\mu 1} & \ldots & \mathfrak{C}^{p\mu\mu} \end{pmatrix},$$

wo die $\mathfrak{B}^{p\varrho\sigma}$ *und* $\mathfrak{C}^{p\varrho\sigma}$ *Matrizes mit* ν_ϱ *Zeilen und* ν_σ *Spalten sind, so nehmen die Bedingungen II, III von Satz* 13 *die folgende Form an*:

$$\begin{aligned} \mathfrak{B}^{p\varrho\sigma} &= 0 && \text{für } \alpha_\sigma - \alpha_\varrho \neq 1, \\ \mathfrak{b}^{p\varrho\sigma}_{\varkappa\lambda} &= b^{p\varrho\sigma}_{\varkappa-\lambda} && \text{für } \alpha_\sigma - \alpha_\varrho = 1, \\ \mathfrak{C}^{p\varrho\sigma} &= 0 && \text{für } \alpha_\varrho - \alpha_\sigma \neq 1, \\ \mathfrak{c}^{p\varrho\sigma}_{\varkappa\lambda} &= c^{p\varrho\sigma}_{\varkappa-\lambda} && \text{für } \alpha_\varrho - \alpha_\sigma = 1. \end{aligned}$$

Dabei ist

$$b^{p\varrho\sigma}_{\iota} = 0,\ c^{p\varrho\sigma}_{\iota} = 0 \quad \textit{für } 1 - \nu_\sigma \leqq \iota \leqq \text{Max}\,(-1, \nu_\varrho - 1 - \nu_\sigma),$$

während die anderen $b_i^{p\varrho\sigma}$ *und* $c_i^{p\varrho\sigma}$ *willkürlich bleiben. Bei festem* p, ϱ, σ *mit* $\alpha_\sigma - \alpha_\varrho = 1$ *ist die Anzahl der willkürlich bleibenden* $b_i^{p\varrho\sigma}$ *gleich* $\mathrm{Min}\,(\nu_\varrho, \nu_\sigma)$ *und ebenso groß ist für* $\alpha_\varrho - \alpha_\sigma = 1$ *die Anzahl der willkürlich bleibenden* $c_i^{p\varrho\sigma}$.

Nun müssen nach Satz 13 die Matrizes A^{p1}, A^{1p} außer II und III noch weitere Bedingungen erfüllen. Diese ergeben für die zunächst noch willkürlich gebliebenen $b_i^{p\varrho\sigma}$, $c_i^{p\varrho\sigma}$ gewisse Einschränkungen, die wir für $\nu = 2$ und $\nu = 3$ in den folgenden Paragraphen vollständig diskutieren werden. Hier soll nur eine wichtige allgemeine Folgerung daraus gezogen werden. Setzt man[9])

$$\sum_{\alpha_\sigma - \alpha_\varrho = 1} \mathrm{Min}\,(\nu_\varrho, \nu_\sigma) = g$$

und ist $g < n - 1$, so gibt es $n - 1$ Zahlen $u_2, u_3, \ldots, u_n$, die nicht sämtlich verschwinden und so beschaffen sind, daß

$$\sum_{p=2}^{n} u_p \mathsf{A}^{p1} = 0$$

ist. Denn diese Gleichung bedeutet nach Satz 15 für die $n - 1$ Größen u_p ein System von nur g linearen homogenen Bedingungsgleichungen

$$\sum_{p=2}^{n} u_p b_i^{p\varrho\sigma} = 0,$$

ist also stets erfüllbar. Nunmehr folgt aber aus der Bedingung VII von Satz 13 für $r = q$, wenn man mit u_p multipliziert und nach p summiert,

$$0 = \sum_{p=2}^{n} u_p e_{pq} \mathsf{A}^{1q} = u_q \mathsf{A}^{1q}.$$

Da nun die u_q nicht sämtlich verschwinden, so ist wenigstens ein A^{1q} gleich 0, und aus Satz 14 folgt dann, daß $\Phi(X)$ die in Satz 5 angegebene Lösung ist. Also gilt

Satz 16. *Wenn für eine in der Umgebung von* $X = E$ *analytische Lösung der Gleichung* (5) *mit* $\Phi(E) = \mathsf{E}$ *die Matrix*

$$\mathsf{A}^{11} - \lambda \mathsf{E} = \left\{\frac{\partial \Phi(X)}{\partial x_{11}}\right\}_{X=E} - \lambda \mathsf{E}$$

die Elementarteiler

$$(\lambda - \alpha_1)^{\nu_1},\ (\lambda - \alpha_2)^{\nu_2},\ \ldots,\ (\lambda - \alpha_u)^{\nu_u}$$

hat und wenn

$$\sum_{\alpha_\sigma - \alpha_\varrho = 1} \mathrm{Min}\,(\nu_\varrho, \nu_\sigma) < n - 1$$

---

[9]) Wenn $\alpha_\sigma - \alpha_\varrho$ für kein Indexpaar ϱ, σ gleich 1 ist, so ist die folgende Summe leer, also $g = 0$ zu setzen.

ist, so ist $\Phi(X)$ *notwendig die bereits in Satz* 5 *angegebene Lösung*

$$\Phi(X) = |X|^{\mathsf{A}} = e^{\mathsf{A}\log|X|} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\mathsf{A}\log|X|)^k}{k!} \quad \text{mit} \quad \mathsf{A} = \mathsf{A}^{11}.$$

Bei der Formulierung dieses Satzes durfte die seither gemachte Voraussetzung, daß A^{11} eine Kästchenmatrix ist, weggelassen werden, weil sie überflüssig ist. Betrachtet man nämlich statt $\Phi(X)$ die äquivalente Lösung $\Gamma^{-1}\Phi(X)\Gamma$ und wählt Γ so, daß $\Gamma^{-1}\mathsf{A}^{11}\Gamma$ eine Kästchenmatrix ist (wobei natürlich $\Gamma^{-1}\mathsf{A}^{11}\Gamma - \lambda\mathsf{E}$ dieselben Elementarteiler wie $\mathsf{A}^{11} - \lambda\mathsf{E}$ hat), so ist nach dem Bewiesenen

$$\Gamma^{-1}\Phi(X)\Gamma = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\Gamma^{-1}\mathsf{A}^{11}\Gamma\log|X|)^k}{k!} = \Gamma^{-1}\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\mathsf{A}^{11}\log|X|)^k}{k!}\Gamma,$$

also auch

$$\Phi(X) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\mathsf{A}^{11}\log|X|)^k}{k!},$$

wie behauptet.

Nun seien $\beta_1, \ldots, \beta_\nu$ die charakteristischen Wurzeln der Matrix A^{11}, d. h. die Wurzeln der Gleichung $|\mathsf{A}^{11} - \lambda\mathsf{E}| = 0$. Sie decken sich natürlich mit den Zahlen

$$\underbrace{\alpha_1, \ldots, \alpha_1}_{\nu_1}, \quad \underbrace{\alpha_2, \ldots, \alpha_2}_{\nu_2}, \quad \ldots, \quad \underbrace{\alpha_\mu, \ldots, \alpha_\mu}_{\nu_\mu} \tag{42}$$

in der seitherigen Bezeichnung. Von den Differenzen $\beta_\lambda - \beta_\varkappa$ mögen genau h den Wert 1 haben. Nach dem im nächsten Paragraphen bewiesenen Hilfssatz ist

$$h \leqq \frac{\nu^2}{4}.$$

Für ein gewisses Indexpaar ϱ, σ sei $\alpha_\sigma - \alpha_\varrho = 1$. Da nun α_ϱ bzw. α_σ genau ν_ϱ- bzw. ν_σ-mal in der Reihe (42) aufgeschrieben ist, so liefert das Indexpaar ϱ, σ genau $\nu_\varrho \cdot \nu_\sigma$ Indexpaare $\varkappa, \lambda$, für die $\beta_\lambda - \beta_\varkappa = 1$ ist. Folglich ist

$$h = \sum_{\alpha_\sigma - \alpha_\varrho = 1} (\nu_\varrho \nu_\sigma),$$

also gewiß

$$\frac{\nu^2}{4} \geqq h \geqq \sum_{\alpha_\sigma - \alpha_\varrho = 1} \mathrm{Min}\,(\nu_\varrho, \nu_\sigma).$$

Aus Satz 16 folgt daher

Satz 17. *Für* $\frac{\nu^2}{4} < n - 1$ *hat die Gleichung* (5) *keine anderen in der Umgebung von* $X = E$ *analytischen Lösungen, für die* $\Phi(E) = \mathsf{E}$ *ist, als die in Satz* 5 *angegebenen.*

§ 7.

Beweis eines in § 6 benutzten Hilfssatzes.

Hilfssatz. *Für $k = 2, 3, 4, \ldots$ sei eine Funktion $f(k)$ folgendermaßen definiert: Es gibt k (vielleicht teilweise einander gleiche) Zahlen $\varrho_1, \ldots, \varrho_k$ derart, daß von den Differenzen $\varrho_m - \varrho_l$ genau $f(k)$ den Wert 1 haben; es gibt aber keine k Zahlen derart, daß mehr als $f(k)$ Differenzen den Wert 1 haben. Dann ist*[10]) $f(k) = \left[\frac{k^2}{4}\right]$.

Beweis. Für $k = 2r$ betrachte man die k Zahlen

$$\varrho_1 = 0, \ldots, \varrho_r = 0, \quad \varrho_{r+1} = 1, \ldots, \varrho_{2r} = 1.$$

Hier gibt es r^2 Differenzen $\varrho_m - \varrho_l$, die gleich 1 sind, nämlich die für

$$l = 1, 2, \ldots, r; \quad m = r+1, r+2, \ldots, 2r.$$

Also ist $f(2r) \geqq r^2$. Für $k = 2r+1$ betrachte man die k Zahlen

$$\varrho_1 = 0, \quad \ldots, \quad \varrho_r = 0, \quad \varrho_{r+1} = 1, \quad \ldots, \quad \varrho_{2r+1} = 1.$$

Hier gibt es $r(r+1)$ Differenzen $\varrho_m - \varrho_l$, die gleich 1 sind; also ist $f(2r+1) \geqq r(r+1)$. Beide Resultate zusammenfassend erhält man

$$f(k) \geqq \left[\frac{k^2}{4}\right]. \tag{I}$$

Nun seien die k Zahlen $\varrho_1, \ldots, \varrho_k$ so gewählt, daß $f(k)$ Differenzen gleich 1 sind. Für jede Zahl λ aus der Reihe $1, \ldots, k$ betrachte man die Menge M_λ derjenigen Indizes $\varkappa$, für welche $\varrho_\varkappa$ den Wert ϱ_λ oder $\varrho_\lambda + 2$ hat. Sei etwa M_1 die größte dieser Mengen oder *eine* der größten, falls es mehrere gleich große maximale gibt. Bei verschiedenen zulässigen Wahlen der Zahlen $\varrho_1, \ldots, \varrho_k$ kann die so definierte Menge M_1 vielleicht verschieden groß ausfallen. Wir denken uns $\varrho_1, \ldots, \varrho_k$ so gewählt, daß M_1 auch in dieser Hinsicht maximal ist. Für s (≥ 1) Indizes $\varkappa$ aus M_1 sei $\varrho_\varkappa$ gleich ϱ_1, für t ($\geqq 0$) Indizes $\varkappa$ aus M_1 sei $\varrho_\varkappa$ gleich $\varrho_1 + 2$. Die k Zahlen $\varrho_\varkappa$ sind dann bei geeigneter Numerierung die folgenden:

$$\underbrace{\varrho_1, \ldots, \varrho_1}_{s}, \quad \underbrace{\varrho_1 + 2, \ldots, \varrho_1 + 2}_{t}, \quad \varrho_{s+t+1}, \ldots, \varrho_k$$

Wenn nun etwa $\varrho_{s+t+1} \neq \varrho_1 + 1$ ist, so ersetze man ϱ_{s+t+1} durch $\varrho_1 + 1$. Dadurch werden $s + t$ Differenzen gewonnen, die gleich 1 sind, andererseits aber auch höchstens $s + t$ solche Differenzen verloren, nämlich diejenigen, die mit ϱ_{s+t+1} und den etwaigen $\varrho_\varkappa$, die gleich $\varrho_{s+t+1} - 1$ sind und deren Anzahl, weil M_1 maximal gewählt war, höchstens gleich $s + t$ ist, gebildet waren. Durch diese Operation ist daher die Anzahl der fraglichen

[10]) Das Zeichen $[m]$ bedeutet hier die größte in m enthaltene ganze Zahl.

Differenzen nicht verkleinert worden, sie ist also immer noch gleich $f(k)$. Nun kann man ebenso $\varrho_{s+t+2}, \ldots, \varrho_k$ sämtlich durch $\varrho_1 + 1$ ersetzen; die Anzahl der fraglichen Differenzen bleibt, weil M_1 in doppelter Hinsicht maximal war, immer gleich $f(k)$. Man hat dann schließlich die folgende Menge gewonnen:

$$\underbrace{\varrho_1, \ldots, \varrho_1}_{s}, \quad \underbrace{\varrho_1 + 2, \ldots, \varrho_1 + 2}_{t}, \quad \underbrace{\varrho_1 + 1, \ldots, \varrho_1 + 1}_{k-s-t}.$$

Hier kann man augenscheinlich $(k - s - t)(s + t)$ Differenzen bilden, die gleich 1 sind. Daher ist

$$\text{(II)} \qquad f(k) = (k - s - t)(s + t) = \frac{k^2}{4} - \left(\frac{k}{2} - s - t\right)^2 \leqq \frac{k^2}{4}.$$

Mit (I) und (II) ist der Hilfssatz bewiesen.

§ 8.

Der Fall $\nu = 2$.

Vorbemerkung. Betrachtet man an Stelle der Lösung $\Phi(X)$ mit $\Phi(E) = \mathsf{E}$ die Lösung $\Psi(X) = |X|^\alpha \Phi(X)$ (Satz 4), so tritt an Stelle der Matrix A^{pq} die folgende:

$$\left\{\frac{\partial \Psi(X)}{\partial x_{pq}}\right\}_{X=E} = \left\{|X|^\alpha \frac{\partial \Phi(X)}{\partial x_{pq}} + \alpha |X|^{\alpha-1} \frac{\partial |X|}{\partial x_{pq}} \Phi(X)\right\}_{X=E} = \mathsf{A}^{pq} + \alpha e_{pq} \mathsf{E}.$$

Daher bleibt A^{pq} für $p \neq q$ unverändert, während an Stelle von A^{pp} die Matrix $\mathsf{A}^{pp} + \alpha \mathsf{E}$ tritt, deren charakteristische Wurzeln um α größer sind als die von A^{pp}. Man kann daher insbesondere durch geeignete Wahl von α eine beliebige der charakteristischen Wurzeln von A^{11} zu 0 machen. Außerdem darf A^{11} natürlich als Kästchenmatrix angenommen werden.

Wir wollen jetzt für kleine Werte von ν die in der Umgebung von $X = E$ analytischen, aber in Satz 5 nicht enthaltenen irreduziblen Lösungen der Gleichung (5) vollständig ermitteln. Nach Satz 6 ist dabei $\Phi(E) = \mathsf{E}$.

Sei zunächst $\nu = 2$. Nach Satz 17 kommt dann, nachdem der Fall $n = 1$ bereits in § 4 erledigt ist, wobei sich keine in Satz 5 nicht enthaltene Lösung ergab (Satz 11), nur der Fall $n = 2$ in Frage, und für die charakteristischen Wurzeln α_1, α_2 der Matrix A^{11} muß nach Satz 16 bei passender Anordnung die Beziehung gelten: $\alpha_1 - \alpha_2 = 1$. Nach der Vorbemerkung kann man $\alpha_2 = 0$, also $\alpha_1 = 1$ annehmen, so daß A^{11} als Kästchenmatrix die folgende ist:

$$\mathsf{A}^{11} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Nach Satz 15 ist dann weiter

$$\mathfrak{A}^{21} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ b & 0 \end{pmatrix}, \qquad \mathfrak{A}^{12} = \begin{pmatrix} 0 & c \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Hieraus folgt

$$\mathfrak{A}^{21}\mathfrak{A}^{12} - \mathfrak{A}^{12}\mathfrak{A}^{21} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ b & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & c \\ 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & c \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ b & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -cb & 0 \\ 0 & bc \end{pmatrix},$$

und daher gehen die Bedingungen VI. VII von Satz 13 über in[11])

$$\begin{pmatrix} -cb & 0 \\ 0 & bc \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ b & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ b & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -cb & 0 \\ 0 & bc \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ b & 0 \end{pmatrix},$$

das heißt $bcb = b$,

$$\begin{pmatrix} 0 & c \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -cb & 0 \\ 0 & bc \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -cb & 0 \\ 0 & bc \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & c \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} 0 & c \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

das heißt $cbc = c$.

Nun ist $b \neq 0$, $c \neq 0$, weil es sich andernfalls nach Satz 14 um die jetzt ausgeschlossene in Satz 5 angegebene Lösung handeln würde. Die letzten beiden Formeln sind daher gleichbedeutend und besagen: $bc = 1$. Infolgedessen ist

$$\begin{pmatrix} b & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\Phi(X)\begin{pmatrix} c & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

eine zu $\Phi(X)$ äquivalente Lösung, und wenn man zu dieser übergeht und sie wieder mit $\Phi(X)$ bezeichnet, dann gehen $\mathfrak{A}^{21}$ und $\mathfrak{A}^{12}$ über in

$$\begin{pmatrix} b & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ b & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{bzw.} \quad \begin{pmatrix} b & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & c \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

während $\mathfrak{A}^{11}$ unverändert bleibt. Man darf daher von vornherein

$$\mathfrak{A}^{11} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \mathfrak{A}^{21} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \mathfrak{A}^{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

annehmen, und aus Formel I in Satz 13 folgt dann

$$\mathfrak{A}^{22} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Die Differentialgleichungen (13) lauten daher

$$|X|\,\frac{\partial \Phi}{\partial x_{s1}} = \frac{\partial |X|}{\partial x_{s1}}\,\Phi\cdot\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \frac{\partial |X|}{\partial x_{s2}}\,\Phi\cdot\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$|X|\,\frac{\partial \Phi}{\partial x_{s2}} = \frac{\partial |X|}{\partial x_{s1}}\,\Phi\cdot\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \frac{\partial |X|}{\partial x_{s2}}\,\Phi\cdot\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

[11]) Die Formeln IV, V in Satz 13 kommen für $n = 2$ nicht in Betracht.

oder wenn man von den Matrizes zu ihren Elementen übergeht,

$$|X|\frac{\partial \varphi_{\varrho 1}}{\partial x_{s1}} = \frac{\partial |X|}{\partial x_{s1}}\varphi_{\varrho 1} + \frac{\partial |X|}{\partial x_{s2}}\varphi_{\varrho 2}, \quad \frac{\partial \varphi_{\varrho 2}}{\partial x_{s1}} = 0, \tag{43}$$

$$\frac{\partial \varphi_{\varrho 1}}{\partial x_{s2}} = 0, \quad |X|\frac{\partial \varphi_{\varrho 2}}{\partial x_{s2}} = \frac{\partial |X|}{\partial x_{s1}}\varphi_{\varrho 1} + \frac{\partial |X|}{\partial x_{s2}}\varphi_{\varrho 2}. \tag{44}$$

Nach der ersten Gleichung (44) und der zweiten Gleichung (43) ist

$$\varphi_{\varrho 1} = \varphi_{\varrho 1}(x_{11}, x_{21}), \quad \varphi_{\varrho 2} = \varphi_{\varrho 2}(x_{12}, x_{22}). \tag{45}$$

Ferner folgt aus der ersten Gleichung (43) und der zweiten Gleichung (44)

$$\sum_{s=1}^{2} x_{s1}\frac{\partial \varphi_{\varrho 1}}{\partial x_{s1}} = \varphi_{\varrho 1}, \qquad \sum_{s=1}^{2} x_{s2}\frac{\partial \varphi_{\varrho 2}}{\partial x_{s2}} = \varphi_{\varrho 2}, \tag{46}$$

$$\frac{\partial \varphi_{\varrho 1}}{\partial x_{s1}} = \frac{\partial \varphi_{\varrho 2}}{\partial x_{s2}}. \tag{47}$$

In (47) ist wegen (45) die linke Seite frei von x_{12}, x_{22} und die rechte Seite frei von x_{11}, x_{21}; also ist

$$\frac{\partial \varphi_{\varrho 1}}{\partial x_{s1}} = \frac{\partial \varphi_{\varrho 2}}{\partial x_{s2}} = \alpha^{\varrho s} = \text{konst.}$$

Hieraus folgt durch Integration, weil $\varphi_{\varrho 1}$ und $\varphi_{\varrho 2}$ wegen (46) homogene Funktionen ihrer Argumente sind,

$$\varphi_{\varrho 1} = \alpha^{\varrho 1}x_{11} + \alpha^{\varrho 2}x_{21}, \quad \varphi_{\varrho 2} = \alpha^{\varrho 1}x_{12} + \alpha^{\varrho 2}x_{22}.$$

Da nun $\Phi(E) = \mathsf{E}$ sein soll, muß

$$\alpha^{11} = 1, \quad \alpha^{21} = 0, \quad \alpha^{12} = 0, \quad \alpha^{22} = 1$$

sein und man erhält

$$\Phi(X) = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix} = X. \tag{48}$$

Diese (übrigens ohne weiteres als Lösung erkennbare) Lösung von (5) ist irreduzibel. Denn wenn es eine konstante Matrix Γ gäbe derart, daß $\Gamma^{-1}X\Gamma$ eine Diagonalmatrix ist, so müßten in der Diagonale einerseits lineare Polynome der x_{pq} stehen, andererseits aber die charakteristischen Wurzeln der Matrix X, was sich widerspricht. Somit gewinnen wir den

Satz 18. *Im Fall $\nu = 2$ hat die Gleichung* (5) *in der Umgebung von $X = E$ analytische, in Satz* 5 *aber nicht enthaltene irreduzible Lösungen nur für $n = 2$; und zwar sind es dann die Lösungen*

$$\Phi(X) = |X|^{\alpha}\begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix} = |X|^{\alpha}X$$

und die damit äquivalenten.

§ 9.

Der Fall $\nu = 3$.

Sei jetzt $r = 3$. Im Fall eines dreifachen Elementarteilers von $\mathsf{A}^{11} - \lambda\mathsf{E}$ ist die Summe in Satz 16 leer, so daß die Lösung die in Satz 5 angegebene Form hat. Im Fall eines zweifachen Elementarteilers muß, damit die Summe nicht abermals leer ist, bei passender Numerierung der charakteristischen Wurzeln $\alpha_1 - \alpha_2 = 1$ sein, so daß man für die Kästchenmatrix A^{11} die folgenden beiden Möglichkeiten hat:

$$\begin{pmatrix} \alpha_2+1 & 0 & 0 \\ 1 & \alpha_2+1 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_2 \end{pmatrix} \quad \text{oder} \quad \begin{pmatrix} \alpha_2+1 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_2 & 0 \\ 0 & 1 & \alpha_2 \end{pmatrix}.$$

Im ersten bzw. zweiten Fall ist nach Satz 15

$$\mathsf{A}^{21} = \begin{pmatrix} 0&0&0 \\ 0&0&0 \\ b&0&0 \end{pmatrix}, \quad \mathsf{A}^{12} = \begin{pmatrix} 0&0&0 \\ 0&0&c \\ 0&0&0 \end{pmatrix} \quad \text{bzw.} \quad \mathsf{A}^{21} = \begin{pmatrix} 0&0&0 \\ 0&0&0 \\ b&0&0 \end{pmatrix}, \quad \mathsf{A}^{12} = \begin{pmatrix} 0&c&0 \\ 0&0&0 \\ 0&0&0 \end{pmatrix}.$$

In beiden Fällen erweist sich die für $p = q = r = 2$ ausgerechnete linke Seite der Formel VI in Satz 13 als 0. Daher ist $\mathsf{A}^{21} = 0$, so daß nach Satz 14 die Lösung wieder die in Satz 5 angegebene Form hat.

Somit bleibt nur der Fall von drei einfachen Elementarteilern. Damit die Summe in Satz 16 nicht leer ist, muß es zwei charakteristische Wurzeln α_ϱ, α_σ geben, für die $\alpha_\varrho - \alpha_\varrho = 1$ ist. Nach der Vorbemerkung zu § 8 darf man eine beliebige charakteristische Wurzel gleich 0 annehmen und darf daher die Kästchenmatrix A^{11} in einer der folgenden vier Gestalten ansetzen, wobei wir jedesmal auch die Matrizes A^{p1}, A^{1p}, deren Gestalt durch Satz 15 bestimmt ist, angegeben haben:

A) $$\mathsf{A}^{11} = \begin{pmatrix} 1&0&0 \\ 0&0&0 \\ 0&0&\alpha \end{pmatrix}, \quad \mathsf{A}^{p1} = \begin{pmatrix} 0&0&0 \\ b^p&0&0 \\ 0&0&0 \end{pmatrix}, \quad \mathsf{A}^{1p} = \begin{pmatrix} 0&c^p&0 \\ 0&0&0 \\ 0&0&0 \end{pmatrix};$$

B) $$\mathsf{A}^{11} = \begin{pmatrix} 1&0&0 \\ 0&0&0 \\ 0&0&0 \end{pmatrix}, \quad \mathsf{A}^{p1} = \begin{pmatrix} 0&0&0 \\ b_1^p&0&0 \\ b_2^p&0&0 \end{pmatrix}, \quad \mathsf{A}^{1p} = \begin{pmatrix} 0&c_1^p&c_2^p \\ 0&0&0 \\ 0&0&0 \end{pmatrix};$$

C) $$\mathsf{A}^{11} = \begin{pmatrix} 0&0&0 \\ 0&1&0 \\ 0&0&1 \end{pmatrix}, \quad \mathsf{A}^{p1} = \begin{pmatrix} 0&b_2^p&b_3^p \\ 0&0&0 \\ 0&0&0 \end{pmatrix}, \quad \mathsf{A}^{1p} = \begin{pmatrix} 0&0&0 \\ c_2^p&0&0 \\ c_3^p&0&0 \end{pmatrix};$$

D) $$\mathsf{A}^{11} = \begin{pmatrix} 2&0&0 \\ 0&1&0 \\ 0&0&0 \end{pmatrix}, \quad \mathsf{A}^{p1} = \begin{pmatrix} 0&0&0 \\ b_1^p&0&0 \\ 0&b_2^p&0 \end{pmatrix}, \quad \mathsf{A}^{1p} = \begin{pmatrix} 0&c_1^p&0 \\ 0&0&c_2^p \\ 0&0&0 \end{pmatrix}.$$

In den Fällen B), C), D) hat die Summe in Satz 16 den Wert 2, so daß nach diesem Satz nur die Fälle $n = 2$ und $n = 3$ interessieren. Im Fall A) ist $\alpha \neq -1, 0, 1, 2$ zu denken; die Summe in Satz 16 hat den Wert 1, so daß nur der Fall $n = 2$ interessiert. Aber auch bei den ausgeschlossenen Werten von α bleibt die folgende Überlegung gültig und sie wird erlauben, bei den Fällen B), C), D) einige Rechnung zu sparen.

Im Fall A) hat, weil $n = 2$ ist, auch p nur den einen Wert 2, so daß wir den Index p bei b und c weglassen können. Die Formel VI in Satz 13 ergibt dann bei Ausrechnung: $bcb = b$. Da aber $b \neq 0$, weil sonst $\mathsf{A}^{21} = 0$ wäre, so daß es sich nach Satz 14 um die jetzt ausgeschlossene in Satz 5 angegebene Lösung handeln würde, so ist $bc = 1$. Nun hat die Gleichung (5) gewiß die reduzible Lösung (vgl. Satz 18)

$$\begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & 0 \\ x_{21} & x_{22} & 0 \\ 0 & 0 & |X|^{\alpha} \end{pmatrix}$$

und daher auch die wegen $bc = 1$ damit äquivalente Lösung

$$\Phi^1(X) = \begin{pmatrix} c & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & 0 \\ x_{21} & x_{22} & 0 \\ 0 & 0 & |X|^{\alpha} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{11} & cx_{12} & 0 \\ bx_{21} & x_{22} & 0 \\ 0 & 0 & |X|^{\alpha} \end{pmatrix}.$$

Für diese sind aber A^{11}, A^{21}, A^{12} gerade die oben in A) angegebenen Matrizes, und da auch A^{22} dadurch nach Satz 13, Formel I eindeutig bestimmt ist, so sind die Differentialgleichungen für unsere gesuchte Funktion $\Phi(X)$ dieselben wie die für die Funktion $\Phi^1(X)$. Wegen Satz 10 ist daher $\Phi(X) = \Phi^1(X)$. Somit liefert der Fall A) keine irreduzible Lösung.

Wir kommen zum Fall B). Die (nur für $n = 3$ in Betracht kommenden) Bedingungen IV, V in Satz 13 sind dann von selbst erfüllt, da die ausgerechneten Matrixprodukte beiderseits gleich 0 sind. Die Bedingungen VI, VII liefern bei Ausrechnung

$$(49) \quad \begin{cases} b_1^p (c_1^q b_1^r + c_2^q b_2^r) + b_1^r (c_1^q b_1^p + c_2^q b_2^p) = e_{rq} b_1^p + e_{pq} b_1^r, \\ b_2^p (c_1^q b_1^r + c_2^q b_2^r) + b_2^r (c_1^q b_1^p + c_2^q b_2^p) = e_{rq} b_2^p + e_{pq} b_2^r, \\ (c_1^r b_1^p + c_2^r b_2^p) c_1^q + (c_1^q b_1^p + c_2^q b_2^p) c_1^r = e_{pr} c_1^q + e_{pq} c_1^r, \\ (c_1^r b_1^p + c_2^r b_2^p) c_2^q + (c_1^q b_1^p + c_2^q b_2^p) c_2^r = e_{pr} c_2^q + e_{pq} c_2^r. \end{cases}$$

Die ersten beiden Formeln ergeben speziell für $r = p$:

$$b_1^p (c_1^q b_1^p + c_2^q b_2^p - e_{pq}) = 0, \quad b_2^p (c_1^q b_1^p + c_2^q b_2^p - e_{pq}) = 0.$$

Nun sind b_1^p, b_2^p nicht beide gleich 0 (wieder wegen Satz 14). Daher muß

$$(50) \qquad c_1^q b_1^p + c_2^q b_2^p = e_{pq}$$

sein, und damit sind dann alle Formeln (49) von selbst erfüllt.

Wegen (50) ist $b_1^2 c_1^2 + b_2^2 c_2^2 = 1$. Daher ist zur gesuchten Matrix $\Phi(X)$ die folgende äquivalent:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c_1^2 & c_2^2 \\ 0 & -b_2^2 & b_1^2 \end{pmatrix} \Phi(X) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & b_1^2 & -c_2^2 \\ 0 & b_2^2 & c_1^2 \end{pmatrix}.$$

Wir wollen zu dieser übergehen und sie fortan mit $\Phi(X)$ bezeichnen. Dann gehen A^{11}, A^{21}, ... wegen (50) über in

$$\mathsf{A}^{11} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathsf{A}^{21} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathsf{A}^{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\mathsf{A}^{31} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \beta & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathsf{A}^{13} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \gamma \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{(nur für } n = 3),$$

wobei

$$\beta = b_1^2 b_2^3 - b_1^3 b_2^2, \quad \gamma = c_1^2 c_2^3 - c_1^3 c_2^2$$

ist, also nach (50)

$$\beta\gamma = \begin{vmatrix} b_1^2 & b_2^2 \\ b_1^3 & b_2^3 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} c_1^2 & c_2^2 \\ c_1^3 & c_2^3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1.$$

Im Fall $n = 2$ fällt das unter die Formeln A) mit $\alpha = 0$, so daß nach dem Bewiesenen keine irreduzible Lösung herauskommt.

Im Fall $n = 3$ gehen wir abermals zu einer äquivalenten Lösung über, nämlich zu

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix} \Phi(X) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \beta \end{pmatrix} \quad \text{(äquivalent wegen } \gamma\beta = 1)$$

und bezeichnen diese fortan mit $\Phi(X)$. Dann gehen A^{11}, A^{21}, ... über in

$$\mathsf{A}^{11} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathsf{A}^{21} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathsf{A}^{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\mathsf{A}^{31} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathsf{A}^{13} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

und die Formel I in Satz 13 liefert weiter

$$\mathsf{A}^{22} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathsf{A}^{32} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathsf{A}^{23} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathsf{A}^{33} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Die Differentialgleichungen (13) lauten daher

$$|X|\frac{\partial\Phi}{\partial x_{s1}} = \frac{\partial|X|}{\partial x_{s1}}\Phi\cdot\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix} + \frac{\partial|X|}{\partial x_{s2}}\Phi\cdot\begin{pmatrix}0&0&0\\1&0&0\\0&0&0\end{pmatrix} + \frac{\partial|X|}{\partial x_{s3}}\Phi\cdot\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\1&0&0\end{pmatrix},$$

$$|X|\frac{\partial\Phi}{\partial x_{s2}} = \frac{\partial|X|}{\partial x_{s1}}\Phi\cdot\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix} + \frac{\partial|X|}{\partial x_{s2}}\Phi\cdot\begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix} + \frac{\partial|X|}{\partial x_{s3}}\Phi\cdot\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&1&0\end{pmatrix},$$

$$|X|\frac{\partial\Phi}{\partial x_{s3}} = \frac{\partial|X|}{\partial x_{s1}}\Phi\cdot\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix} + \frac{\partial|X|}{\partial x_{s2}}\Phi\cdot\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix} + \frac{\partial|X|}{\partial x_{s3}}\Phi\cdot\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&1\end{pmatrix},$$

oder, indem man von den Matrizes zu ihren Elementen übergeht,

$$|X|\frac{\partial\varphi_{\varrho1}}{\partial x_{s1}} = \sum_{q=1}^{3}\frac{\partial|X|}{\partial x_{sq}}\varphi_{\varrho q}, \quad \frac{\partial\varphi_{\varrho2}}{\partial x_{s1}} = 0, \quad \frac{\partial\varphi_{\varrho3}}{\partial x_{s1}} = 0,$$

$$\frac{\partial\varphi_{\varrho1}}{\partial x_{s2}} = 0, \quad |X|\frac{\partial\varphi_{\varrho2}}{\partial x_{s2}} = \sum_{q=1}^{3}\frac{\partial|X|}{\partial x_{sq}}\varphi_{\varrho q}, \quad \frac{\partial\varphi_{\varrho3}}{\partial x_{s2}} = 0,$$

$$\frac{\partial\varphi_{\varrho1}}{\partial x_{s3}} = 0, \quad \frac{\partial\varphi_{\varrho2}}{\partial x_{s3}} = 0, \quad |X|\frac{\partial\varphi_{\varrho3}}{\partial x_{s3}} = \sum_{q=1}^{3}\frac{\partial|X|}{\partial x_{sq}}\varphi_{\varrho q}.$$

Aus diesen Gleichungen ergibt sich sofort:

$$(51)\qquad \begin{cases}\varphi_{\varrho1} = \varphi_{\varrho1}(x_{11}, x_{21}, x_{31}),\\ \varphi_{\varrho2} = \varphi_{\varrho2}(x_{12}, x_{22}, x_{32}),\\ \varphi_{\varrho3} = \varphi_{\varrho3}(x_{13}, x_{23}, x_{33}),\end{cases}$$

$$(52)\qquad \sum_{s=1}^{3}x_{s1}\frac{\partial\varphi_{\varrho1}}{\partial x_{s1}} = \varphi_{\varrho1}, \quad \sum_{s=1}^{3}x_{s2}\frac{\partial\varphi_{\varrho2}}{\partial x_{s2}} = \varphi_{\varrho2}, \quad \sum_{s=1}^{3}x_{s3}\frac{\partial\varphi_{\varrho3}}{\partial x_{s3}} = \varphi_{\varrho3},$$

$$(53)\qquad \frac{\partial\varphi_{\varrho1}}{\partial x_{s1}} = \frac{\partial\varphi_{\varrho2}}{\partial x_{s2}} = \frac{\partial\varphi_{\varrho3}}{\partial x_{s3}}.$$

Aus (53) und (51) folgt dann

$$\frac{\partial\varphi_{\varrho1}}{\partial x_{s1}} = \frac{\partial\varphi_{\varrho2}}{\partial x_{s2}} = \frac{\partial\varphi_{\varrho3}}{\partial x_{s3}} = \alpha^{\varrho s} = \text{konst.}$$

Hieraus erhält man durch Integration, weil $\varphi_{\varrho1}$, $\varphi_{\varrho2}$, $\varphi_{\varrho3}$ nach (52) homogene Funktionen ihrer Argumente sind,

$$\varphi_{\varrho\sigma} = \sum_{s=1}^{3}\alpha^{\varrho s}x_{s\sigma}.$$

Speziell für $X = E$ ergibt sich daraus, weil $\Phi(E) = \mathsf{E}$ sein soll,

$$\varepsilon_{\varrho\sigma} = \sum_{s=1}^{3}\alpha^{\varrho s}e_{s\sigma} = \alpha^{\varrho\sigma}.$$

Daher ist $\alpha^{\varrho\sigma} = \varepsilon_{\varrho\sigma} = e_{\varrho\sigma}$, und man erhält:

$$\Phi(X) = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} \end{pmatrix} = X. \tag{54}$$

Diese Lösung ist irreduzibel. Denn wenn es eine konstante Matrix Γ gäbe derart, daß

$$\Gamma^{-1} X \Gamma = \begin{pmatrix} \psi_{11} & 0 & 0 \\ 0 & \psi_{22} & \psi_{23} \\ 0 & \psi_{32} & \psi_{33} \end{pmatrix}$$

ist, dann müßte ψ_{11} einerseits ein lineares Polynom der x_{pq} sein, andererseits aber auch eine charakteristische Wurzel der Matrix X, was sich widerspricht.

Wir kommen zum Fall C). Die Bedingungen IV, V in Satz 13 sind wieder von selbst erfüllt. Die Bedingungen VI, VII liefern bei Ausrechnung

$$\begin{cases} (b_2^p c_2^q + b_3^p c_3^q)\, b_2^r + (b_2^r c_2^q + b_3^r c_3^q)\, b_2^p = e_{rq}\, b_2^p + e_{pq}\, b_2^r, \\ (b_2^p c_2^q + b_3^p c_3^q)\, b_3^r + (b_2^r c_2^q + b_3^r c_3^q)\, b_3^p = e_{rq}\, b_3^p + e_{pq}\, b_3^r, \\ c_2^r\,(b_2^p c_2^q + b_3^p c_3^q) + c_2^q (b_2^p c_2^r + b_3^p c_3^r) = e_{pr}\, c_2^q + e_{pq}\, c_2^r, \\ c_3^r\,(b_2^p c_2^q + b_3^p c_3^q) + c_3^q (b_2^p c_2^r + b_3^p c_3^r) = e_{pr}\, c_3^q + e_{pq}\, c_3^r. \end{cases} \tag{55}$$

Die ersten beiden Formeln ergeben speziell für $r = p$

$$(b_2^p c_2^q + b_3^p c_3^q - e_{pq})\, b_2^p = 0, \quad (b_2^p c_2^q + b_3^p c_3^q - e_{pq})\, b_3^p = 0.$$

Nun sind b_2^p, b_3^p nicht beide gleich 0 (wieder wegen Satz 14). Daher muß

$$b_2^p c_2^q + b_3^p c_3^q = e_{pq} \tag{56}$$

sein, und damit sind dann alle Formeln (55) von selbst erfüllt.

Wegen (56) ist $b_2^2 c_2^2 + b_3^2 c_3^2 = 1$. Daher ist zur gesuchten Matrix $\Phi(X)$ die folgende äquivalent:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -b_2^2 & -b_3^2 \\ 0 & c_3^2 & -c_2^2 \end{pmatrix} \Phi(X) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -c_2^2 & b_3^2 \\ 0 & -c_3^2 & -b_2^2 \end{pmatrix}.$$

Wir wollen zu dieser übergehen und sie fortan mit $\Phi(X)$ bezeichnen. Dann gehen A^{11}, A^{21}, ... unter Berücksichtigung von (56) über in

$$\mathsf{A}^{11} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \mathsf{A}^{21} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \mathsf{A}^{12} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\mathsf{A}^{31} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -\beta \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \mathsf{A}^{13} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -\gamma & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{(nur für } n = 3),$$

wobei

$$\beta = b_2^2\, b_3^3 - b_2^3\, b_3^2, \quad \gamma = c_2^2\, c_3^3 - c_2^3\, c_3^2$$

ist, also unter Benutzung von (56)

$$\beta\gamma = \begin{vmatrix} b_2^2 & b_3^2 \\ b_2^3 & b_3^3 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} c_2^2 & c_3^2 \\ c_2^3 & c_3^3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1.$$

Im Fall $n = 2$ fällt das, wenn man durch Vertauschung der ersten zwei Zeilen und Spalten zu einer äquivalenten Lösung übergeht, unter die Formeln A) mit $\alpha = 1$, so daß wieder keine irreduzible Lösung herauskommt.

Im Fall $n = 3$ gehen wir ebenfalls zu einer äquivalenten Lösung über, nämlich zu

$$\begin{pmatrix} \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Phi(X) \begin{pmatrix} \beta & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{(äquivalent wegen } \gamma\beta = 1\text{)}$$

und bezeichnen diese fortan mit $\Phi(X)$. Dann gehen A^{11}, A^{21}, ... über in

$$\mathsf{A}^{11} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathsf{A}^{21} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathsf{A}^{12} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\mathsf{A}^{31} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathsf{A}^{13} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

und die Formel I in Satz 13 liefert weiter

$$\mathsf{A}^{22} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathsf{A}^{32} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathsf{A}^{23} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathsf{A}^{33} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Die Integration der Differentialgleichungen wollen wir diesmal durch einen Kunstgriff umgehen. Man sieht nämlich ohne weiteres (für beliebiges r und n), daß mit $\Phi(X)$ stets auch $\Phi(|X|\,X'^{-1})$, wo X' die transponierte Matrix von X ist, eine irreduzible Lösung von (5) ist. Aus der in (54) gegebenen Lösung $\Phi(X) = X$ entsteht so die Lösung

$$(57)\quad \Phi^1(X) = |X|\,X'^{-1} = \begin{pmatrix} x_{22}x_{33} - x_{23}x_{32} & x_{23}x_{31} - x_{21}x_{33} & x_{21}x_{32} - x_{22}x_{31} \\ x_{32}x_{13} - x_{33}x_{12} & x_{33}x_{11} - x_{31}x_{13} & x_{31}x_{12} - x_{32}x_{11} \\ x_{12}x_{23} - x_{13}x_{22} & x_{13}x_{21} - x_{11}x_{23} & x_{11}x_{22} - x_{12}x_{21} \end{pmatrix}.$$

Bildet man nun von dieser Lösung die Matrizes $\mathsf{A}^{\rho\sigma}$, so sind es genau die oben erhaltenen. Die Differentialgleichungen für die gesuchte Matrix $\Phi(X)$ sind

daher dieselben wie für die Matrix $\Phi^1(X)$ und folglich ist nach Satz 10 $\Phi(X) = \Phi^1(X)$.

Schließlich kommen wir zum Fall D). Bei diesem liefern die Bedingungen VI, VII in Satz 13 bei Ausrechnung

$$(58)\qquad \begin{cases} (b_1^p c_1^q - b_2^p c_2^q)\, b_1^r + b_1^r c_1^q b_1^p = e_{rq} b_1^p + e_{pq} b_1^r, \\ b_2^p c_2^q b_2^r - b_2^r (b_1^p c_1^q - b_2^p c_2^q) = e_{rq} b_2^p + e_{pq} b_2^r, \\ c_1^r (b_1^p c_1^q - b_2^p c_2^q) + b_1^p c_1^q c_1^r = e_{pr} c_1^q + e_{pq} c_1^r, \\ c_2^r b_2^p c_2^q - (b_1^p c_1^q - b_2^p c_2^q) c_2^r = e_{pr} c_2^q + e_{pq} c_2^r. \end{cases}$$

Die ersten beiden Formeln für $r = p$ und die letzten beiden für $r = q$ besagen speziell

$$(59)\qquad \begin{cases} (2\, b_1^p c_1^q - b_2^p c_2^q - 2\, e_{pq})\, b_1^p = 0, \\ (2\, b_2^p c_2^q - b_1^p c_1^q - 2\, e_{pq})\, b_2^p = 0, \\ (2\, b_1^p c_1^q - b_2^p c_2^q - 2\, e_{pq})\, c_1^q = 0, \\ (2\, b_2^p c_2^q - b_1^p c_1^q - 2\, e_{pq})\, c_2^q = 0. \end{cases}$$

Nun dürfen b_1^p, b_2^p für kein p beide zugleich verschwinden, ebenso c_1^p, c_2^p (wieder wegen Satz 14). Daraus läßt sich folgern, daß nur der Fall $n = 2$ möglich ist. Denn angenommen, es sei $n = 3$. Wenn dann erstens $b_1^2 = 0$, $b_2^2 \neq 0$, so folgt aus der zweiten Gleichung (59) für $p = 2$, $q = 3$: $c_2^3 = 0$; sodann aus der zweiten Gleichung (58) für $p = 2$, $q = r = 3$: $0 = b_2^2$ im Widerspruch mit der Voraussetzung. Wenn zweitens $b_1^2 \neq 0$, $b_2^2 = 0$, so folgt aus der ersten Gleichung (59) für $p = 2$, $q = 3$: $c_1^3 = 0$; sodann aus der dritten Gleichung (58) für $q = 2$, $p = r = 3$: $0 = c_1^2$, wodurch sich ein Widerspruch gegen die erste Gleichung (59) für $p = q = 2$ ergibt. Wenn schließlich $b_1^2 \neq 0$, $b_2^2 \neq 0$, so folgt aus den ersten beiden Gleichungen (59) für $p = 2$, $q = 3$:

$$2\, b_1^2 c_1^3 - b_2^2 c_2^3 = 0, \quad 2\, b_2^2 c_2^3 - b_1^2 c_1^3 = 0,$$

also $c_1^3 = 0$, $c_2^3 = 0$, was ausgeschlossen war.

Somit bleibt in der Tat nur die Möglichkeit $n = 2$ übrig. Wir unterscheiden drei Fälle:

a) $\quad b_1^2 = 0, \quad b_2^2 \neq 0,$

b) $\quad b_1^2 \neq 0, \quad b_2^2 = 0,$

c) $\quad b_1^2 \neq 0, \quad b_2^2 \neq 0.$

Im Fall a) folgt aus der zweiten und dritten Gleichung (59)

$$b_2^2 c_2^2 = 1, \ (b_2^2 c_2^2 + 2)\, c_1^2 = 0; \quad \text{also } c_1^2 = 0.$$

Daher läuft dieser Fall, wenn man dadurch zu einer äquivalenten Lösung übergeht, daß man die erste Zeile und Spalte durch zyklische Vertauschung zur letzten macht, auf den Fall A) mit $\alpha = 2$ hinaus. Er liefert also keine irreduzible Lösung.

Im Fall b) folgt aus der ersten und letzten Gleichung (59)

$$b_1^2 c_1^2 = 1, \quad (b_1^2 c_1^2 + 2) c_2^2 = 0, \quad \text{also } c_2^2 = 0.$$

Daher läuft dieser Fall, wenn man zur Lösung $|X|^{-1} \Phi(X)$ übergeht, wodurch sich die Diagonalelemente von A^{11} um 1 vermindern, während A^{21} und A^{12} unverändert bleiben (siehe Vorbemerkung zu § 8), auf den Fall A) mit $\alpha = -1$ hinaus; er liefert also wieder keine irreduzible Lösung.

Somit bleibt nur der Fall c). Die ersten beiden Gleichungen (59) besagen dann

$$2 b_1^2 c_1^2 - b_2^2 c_2^2 - 2 = 0, \quad 2 b_2^2 c_2^2 - b_1^2 c_1^2 - 2 = 0, \quad \text{also } b_1^2 c_1^2 = b_2^2 c_2^2 = 2,$$

wodurch die letzten beiden von selbst erfüllt sind. Wir gehen nun von $\Phi(X)$ zu der äquivalenten Lösung

$$\begin{pmatrix} b_1^2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & c_2^2 \end{pmatrix} \Phi(X) \begin{pmatrix} \frac{1}{2} c_1^2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} b_2^2 \end{pmatrix}$$

über und bezeichnen diese fortan mit $\Phi(X)$. Dann gehen $\mathsf{A}^{11}, \ldots$ über in

$$\mathsf{A}^{11} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathsf{A}^{21} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathsf{A}^{12} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

und die Formel I in Satz 13 liefert noch

$$\mathsf{A}^{22} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Die Differentialgleichungen (13) lauten daher

$$|X| \frac{\partial \Phi}{\partial x_{s1}} = \frac{\partial |X|}{\partial x_{s1}} \Phi \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \frac{\partial |X|}{\partial x_{s2}} \Phi \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix},$$

$$|X| \frac{\partial \Phi}{\partial x_{s2}} = \frac{\partial |X|}{\partial x_{s1}} \Phi \cdot \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \frac{\partial |X|}{\partial x_{s2}} \Phi \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Hieraus folgt sogleich

$$\sum_{s=1}^{2}\left(x_{s1}\frac{\partial\Phi}{\partial x_{s1}} + x_{s2}\frac{\partial\Phi}{\partial x_{s2}}\right) = \Phi\cdot 2\,\mathsf{E} = 2\,\Phi. \tag{60}$$

Außerdem ergeben sich, wenn man von den Matrizes zu ihren Elementen übergeht, u. a. die Formeln

$$\frac{\partial\varphi_{\varrho 1}}{\partial x_{s2}} = 0, \qquad \frac{\partial\varphi_{\varrho 3}}{\partial x_{s1}} = 0, \tag{61}$$

$$\frac{\partial\varphi_{\varrho 1}}{\partial x_{s1}} = \frac{\partial\varphi_{\varrho 2}}{\partial x_{s2}}, \qquad \frac{\partial\varphi_{\varrho 2}}{\partial x_{s1}} = \frac{\partial\varphi_{\varrho 3}}{\partial x_{s2}}. \tag{62}$$

Wegen (61) ist

$$\varphi_{\varrho 1} = \varphi_{\varrho 1}(x_{11}, x_{21}), \quad \varphi_{\varrho 3} = \varphi_{\varrho 3}(x_{12}, x_{22})$$

und sodann wegen (62)

$$\frac{\partial^2\varphi_{\varrho 1}}{\partial x_{s1}\,\partial x_{t1}} = \frac{\partial^2\varphi_{\varrho 2}}{\partial x_{s2}\,\partial x_{t1}} = \frac{\partial^2\varphi_{\varrho 3}}{\partial x_{s2}\,\partial x_{t2}} = 2\,\alpha_\varrho^{st} = 2\,\alpha_\varrho^{ts} = \text{konst.}$$

Hieraus erhält man durch Integration, weil $\varphi_{\varrho 1}$, $\varphi_{\varrho 2}$, $\varphi_{\varrho 3}$ wegen (60) homogene Funktionen ihrer Argumente sind,

$$\varphi_{\varrho 1} = \sum_{s=1}^{2}\sum_{t=1}^{2}\alpha_\varrho^{st}\,x_{s1}\,x_{t1},$$

$$\varphi_{\varrho 2} = 2\sum_{s=1}^{2}\sum_{t=1}^{2}\alpha_\varrho^{st}\,x_{s2}\,x_{t1},$$

$$\varphi_{\varrho 3} = \sum_{s=1}^{2}\sum_{t=1}^{2}\alpha_\varrho^{st}\,x_{s2}\,x_{t2}.$$

Da nun $\Phi(E) = \mathsf{E}$ sein soll, ergibt sich speziell für $X = E$

$$\varepsilon_{\varrho 1} = \sum_{s=1}^{2}\sum_{t=1}^{2}\alpha_\varrho^{st}\,e_{s1}\,e_{t1} = \alpha_\varrho^{11},$$

$$\varepsilon_{\varrho 2} = 2\sum_{s=1}^{2}\sum_{t=1}^{2}\alpha_\varrho^{st}\,e_{s2}\,e_{t1} = 2\,\alpha_\varrho^{21} = 2\,\alpha_\varrho^{12},$$

$$\varepsilon_{\varrho 3} = \sum_{s=1}^{2}\sum_{t=1}^{2}\alpha_\varrho^{st}\,e_{s2}\,e_{t2} = \alpha_\varrho^{22}.$$

Dadurch sind die Konstanten α_ϱ^{st} bestimmt, und man erhält

$$\Phi(X) = \begin{pmatrix} x_{11}^2 & 2\,x_{11}x_{12} & x_{12}^2 \\ x_{11}x_{21} & x_{11}x_{22} + x_{12}x_{21} & x_{12}x_{22} \\ x_{21}^2 & 2\,x_{21}x_{22} & x_{22}^2 \end{pmatrix}.$$

Diese Lösung ist wieder irreduzibel, wie man genau wie in den früheren Fällen erkennt.

Die verschiedenen Resultate dieses Paragraphen fassen wir zusammen in

Satz 19. *Im Fall $\nu = 3$ hat die Gleichung* (5) *in der Umgebung von $X = E$ analytische, in Satz* 5 *aber nicht enthaltene irreduzible Lösungen nur, wenn $n = 2$ oder $n = 3$ ist. Für $n = 2$ sind es die Lösungen*

$$|X|^{\alpha}\begin{pmatrix} x_{11}^2 & 2\,x_{11}x_{12} & x_{12}^2 \\ x_{11}x_{21} & x_{11}x_{22} + x_{12}x_{21} & x_{12}x_{22} \\ x_{21}^2 & 2\,x_{21}x_{22} & x_{22}^2 \end{pmatrix}$$

und die damit äquivalenten. Für $n = 3$ sind es die Lösungen

$$|X|^{\alpha}\begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} \end{pmatrix} = |X|^{\alpha}X,$$

$$|X|^{\alpha}\begin{pmatrix} x_{22}x_{33}-x_{23}x_{32} & x_{23}x_{31}-x_{21}x_{33} & x_{21}x_{32}-x_{22}x_{31} \\ x_{32}x_{13}-x_{33}x_{12} & x_{33}x_{11}-x_{31}x_{13} & x_{31}x_{12}-x_{32}x_{11} \\ x_{12}x_{23}-x_{13}x_{22} & x_{13}x_{21}-x_{11}x_{23} & x_{11}x_{22}-x_{12}x_{21} \end{pmatrix} = |X|^{\alpha+1}X'^{-1}$$

und die damit äquivalenten.

(Eingegangen am 29. Oktober 1941.)

Zur asymptotischen Integration von Differentialgleichungen.

Herrn Konrad Knopp
zum 60. Geburtstag am 22. Juli 1942 gewidmet.

Von

H. Seifert in Braunschweig.

Eine Differentialgleichung

$$y'' + p(x)\, y' - \left(\varrho^2 q(x) + r(x)\right) y = 0$$

pflegt man für große Werte von ϱ angenähert mit dem Ansatze

$$y = e^{\varrho\, g(x)} \left(h(x) + \frac{1}{\varrho}\, h_1(x) + \frac{1}{\varrho^2}\, h_2(x) + \cdots + \frac{1}{\varrho^m}\, h_m(x) \right)$$

zu integrieren. Die Differentialgleichung läßt sich durch geeignete Wahl der Funktionen g, h, h_1, ..., h_m genau bis auf ein Glied der Größenordnung $\varrho^{-m} \cdot e^{\varrho\, g(x)}$ erfüllen, wofür man auch sagt, asymptotisch integrieren. — Je nach dem Vorzeichen von q haben ihre Lösungen ganz verschiedenen Charakter: In Intervallen, in denen $q > 0$ ist, verlaufen sie aperiodisch, in solchen, in denen $q < 0$ ist, oszillatorisch. Wo zwei solche Intervalle zusammenstoßen, liegt eine singuläre Stelle der asymptotischen Lösungen, während die von der asymptotischen Lösung approximierte exakte Lösung im allgemeinen regulär ist. Ein und dieselbe Lösung der Differentialgleichung wird also auf beiden Seiten der Nullstelle von $q(x)$ durch ganz verschiedenartige Funktionen asymptotisch dargestellt, und es erhebt sich die Frage, welcher Zusammenhang zwischen diesen Funktionen besteht.

Diese Frage ist von H. Jeffreys [6], S. Goldstein [7] und R. E. Langer [8] behandelt worden. Die beiden ersten Autoren benutzen eine Methode, die mir mathematisch nicht zureichend zu sein scheint. Sie besteht darin, daß man in der gegebenen Differentialgleichung, in der $p(x) = r(x) \equiv 0$ angenommen wird, die Funktion $q(x)$ in der Umgebung ihrer Nullstelle durch das Anfangsglied ihrer Taylor-Entwicklung ersetzt. Die so abgeänderte Differentialgleichung läßt sich durch Besselsche Funktionen integrieren, und es wird behauptet, daß die bekannten asymptotischen Formeln für die Besselschen Funktionen den gewünschten Zusammenhang zwischen den asymptotischen Lösungen der gegebenen Differentialgleichung liefern.

R. E. Langer legt die Lösung der Differentialgleichung durch Funktionswert und Ableitung an einer Nullstelle von q fest und gibt auf beiden Seiten der Nullstelle asymptotische Darstellungen dieser Lösung.

Die Frage, die nachstehend behandelt wird, lautet folgendermaßen: Es sei eine Lösung $y(x, \varrho)$ der Differentialgleichung in einem Punkte x_0 asymptotisch bekannt. Was kann man daraus über das asymptotische Verhalten von $y(x, \varrho)$ in einem anderen Punkte x_1 schließen, insbesondere dann, wenn x_0 und x_1 verschiedenartigen Intervallen angehören? Wir beschränken uns dabei auf einfache Nullstellen von $q(x)$.

Die Veranlassung zu der vorliegenden mathematischen Untersuchung gab ein Problem der Praxis, das auf eine Differentialgleichung der obigen Art führte. Ich verdanke den Hinweis auf diese Differentialgleichung Herrn Dr. G. Guderley, der sie unabhängig von den genannten Autoren asymptotisch integriert hat mit Methoden, die den ihren ähnlich sind.

§ 1.

Der Bereich der Gültigkeit von asymptotischen Darstellungen.

In der Differentialgleichung

$$L(y) \equiv y'' + p(x)\, y' - (\varrho^2 q(x) + r(x)) y = 0 \tag{1}$$

seien p, q, r reguläre analytische Funktionen in einem gewissen einfach zusammenhängenden Gebiete $\mathfrak{G}$ der komplexen x-Ebene und ϱ ein positiver Parameter. Wir setzen überdies voraus, daß

$$q(x) \neq 0$$

überall in $\mathfrak{G}$ ist.

Um die Differentialgleichung (1) für große Werte von ϱ asymptotisch zu integrieren, macht man für y den formalen Ansatz

$$y = e^{\varrho\, g(x)} (h(x) + \varrho^{-1} h_1(x) + \varrho^{-2} h_2(x) + \cdots). \tag{2}$$

Wenn man damit in die Differentialgleichung (1) hineingeht, nach Potenzen von ϱ ordnet und alle Koeffizienten dieser formalen Potenzreihenentwicklung $= 0$ setzt, so ergeben sich die folgenden Differentialgleichungen erster Ordnung zur Bestimmung von g, h, h_1, h_2, ...

$$\left\{\begin{array}{l} g'^2 - q = 0 \\ 2\, g' h' + (g'' + p g') h = 0 \\ 2\, g' h_1' + (g'' + p g') h_1 + (h'' + p h' - r h) = 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ 2\, g' h_n' + (g'' + p g')\, h_n + (h_{n-1}'' + p h_{n-1}' - r h_{n-1}) = 0. \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{array}\right. \tag{3}$$

Dabei wurde $h(x) \neq 0$ angenommen, was offenbar keine wesentliche Einschränkung ist. Aus (3) folgt

$$g = \int \sqrt{q}\, dx, \tag{4}$$

ferner

$$h = \frac{c}{\sqrt[4]{q}} \cdot e^{-\frac{1}{2}\int p\,dx} \qquad (c \neq 0). \tag{5}$$

h verschwindet also nirgends in $\mathfrak{G}$.

Die durch die Integration in g, h, h_1, h_2, ... eingehenden Integrationskonstanten und die in $\mathfrak{G}$ zu benutzenden Zweige dieser mehrdeutigen Funktionen seien ein für allemal fest gewählt. Da $q \neq 0$ in $\mathfrak{G}$ ist, so folgt aus den Differentialgleichungen (3), daß g, h, h_1, ... in $\mathfrak{G}$ überall regulär analytisch sind. Die so bestimmte Reihe (2) ist bekanntlich im allgemeinen für keinen Wert von ϱ konvergent.

Wir betrachten nun eine Partialsumme von (2)

$$\mathfrak{y}(x, \varrho) = e^{\varrho g}(h + \varrho^{-1} h_1 + \varrho^{-2} h_2 + \cdots + \varrho^{-m} h_m) \qquad (m \geqq 0). \tag{6}$$

Da wir den Index m ein für allemal festhalten, bringen wir ihn in dem Symbol $\mathfrak{y}(x, \varrho)$ nicht besonders zum Ausdruck.

Wir sagen, *daß eine Lösung* $y(x, \varrho)$ *von* (1) *in einem Punkte* x_0 *von* $\mathfrak{G}$ *asymptotisch durch* $\mathfrak{y}(x, \varrho)$ *dargestellt wird, wenn für Funktionswert und Ableitung Gleichungen von der Form bestehen*[1])

$$\begin{aligned} y(x_0, \varrho) &= \mathfrak{y}(x_0, \varrho) + \varrho^{-m-1} \cdot e^{\varrho g(x_0)} \cdot O(1), \\ y'(x_0, \varrho) &= \mathfrak{y}'(x_0, \varrho) + \varrho^{-m} \cdot e^{\varrho g(x_0)} \cdot O(1); \end{aligned} \tag{7}$$

die Striche an y und $\mathfrak{y}$ bezeichnen Ableitungen nach x. m ist die in (6) definierte ganze Zahl. Es wird also nur verlangt, daß die Gleichungen (7) für die m-te Partialsumme (6) und nicht etwa notwendig für sämtliche Partialsummen von (2) gelten. Z. B. kann man diejenige Lösung $y(x, \varrho)$ von (1) betrachten, die durch die „Anfangswerte" $y(x_0, \varrho) = \mathfrak{y}(x_0, \varrho)$, $y'(x_0, \varrho) = \mathfrak{y}'(x_0, \varrho)$ festgelegt ist. In diesem Falle sind die beiden Funktionen $O(1)$ identisch 0.

Wenn $y(x, \varrho)$ im Punkte x_0 asymptotisch durch $\mathfrak{y}(x, \varrho)$ dargestellt wird, so fragt es sich, in welchen anderen Punkten das auch noch der Fall ist. Darüber gilt der

Satz I. *Wenn* $y(x, \varrho)$ *im Punkte* x_0 *durch* $\mathfrak{y}(x, \varrho)$ *asymptotisch dargestellt wird, so auch in jedem Punkte* x_1 *von* $\mathfrak{G}$, *den man von* x_0 *aus auf einer*

[1]) Dabei bezeichnen wir wie üblich mit $O(1)$ *jede* Funktion von ϱ, die beschränkt bleibt für alle genügend großen ϱ. Es ist also $f(\varrho) = O(1)$, wenn zwei positive Konstanten ϱ_0 und H existieren, so daß $|f(\varrho)| < H$ für alle $\varrho > \varrho_0$.

in $\mathfrak{G}$ verlaufenden rektifizierbaren Kurve C erreichen kann, längs der der Realteil $\Re(g)$ von g nirgends abnimmt. Genauer gelten Relationen der folgenden Art

$$(8)\qquad \begin{aligned} y(x,\varrho) &= \mathfrak{y}(x,\varrho) + \varrho^{-m-1}\cdot e^{\varrho\, g(x)}\cdot O(1),\\ y'(x,\varrho) &= \mathfrak{y}'(x,\varrho) + \varrho^{-m}\cdot e^{\varrho\, g(x)}\cdot O(1)\end{aligned}$$

gleichmäßig[2]) *für alle x von C.*

Insbesondere gilt hiernach die asymptotische Darstellung in allen Punkten x_1 der durch x_0 hindurchgehenden Kurve $\Re(g) = \text{const}$. Da $g' = \sqrt{q}$ in $\mathfrak{G}$ von Null verschieden ist, so geht durch jeden Punkt von $\mathfrak{G}$ genau eine Kurve $\Re(g) = \text{const}$ hindurch.

Wenn x_1 von x_0 aus nicht auf einem Wege der im Satz genannten Art erreichbar ist, so läßt sich von vornherein nicht entscheiden, ob y in x_1 durch $\mathfrak{y}$ asymptotisch dargestellt wird oder nicht. Da es auf Grund von Satz I in jedem hinreichend kleinen Teilgebiet von G eine Lösung $y(x,\varrho)$ der Differentialgleichung (1) gibt, die in diesem Teilgebiete asymptotisch durch $\mathfrak{y}(x,\varrho)$ dargestellt wird, so ist es sinnvoll, $\mathfrak{y}(x,\varrho)$ als eine *asymptotische Lösung* von (1) zu bezeichnen.

Der Beweis von Satz I benutzt einen Kunstgriff von Liouville [1], der von Birkhoff [3] und Blumenthal [4] für Beweise ähnlicher Sätze ausgebaut worden ist. — Wir betrachten zunächst den Fall $m = 0$. Alsdann lautet die asymptotische Lösung

$$\mathfrak{y}(x,\varrho) = h(x)\, e^{\varrho\, g(x)}.$$

$y(x,\varrho)$ sei diejenige Lösung von (1), die im Punkte x_0 dieselben Anfangswerte hat wie $\mathfrak{y}$; d. h. es sei

$$(9)\qquad y(x_0,\varrho) = h(x_0)\, e^{\varrho\, g(x_0)};\quad y'(x_0,\varrho) = (\varrho h(x_0) g'(x_0) + h'(x_0)) e^{\varrho\, g(x_0)}.$$

Wir führen außer der gegebenen Differentialgleichung $L(y) = 0$ die Differentialgleichung

$$(10)\qquad A(\mathfrak{y}) \equiv \mathfrak{y}'' + p\,\mathfrak{y}' - \left[\varrho^2 q + \frac{h' p}{h} + \frac{h''}{h}\right]\mathfrak{y} = 0$$

ein, die dadurch charakterisiert ist, daß

$$h\, e^{\varrho\, g} \quad \text{und} \quad h\, e^{-\varrho\, g}$$

ein System linear unabhängiger Lösungen sind. Die Differenz

$$\eta(x,\varrho) = y(x,\varrho) - \mathfrak{y}(x,\varrho)$$

---

[2]) Wir sagen, eine Relation $f(x,\varrho) = w(x,\varrho)\cdot O(1)$ gelte *gleichmäßig* für alle Punkte x einer gewissen Menge $\mathfrak{M}$, wenn die darin auftretende Funktion $O(1) = \varphi(x,\varrho)$ gleichmäßig beschränkt ist für alle x auf $\mathfrak{M}$ und alle genügend großen ϱ; genauer: Es gibt zwei positive Zahlen H und ϱ_0, so daß $|\varphi(x,\varrho)| < H$ für alle x auf $\mathfrak{M}$ und alle $\varrho > \varrho_0$.

genügt dann der Differentialgleichung

$$\Lambda(\eta) = \left(r - \frac{h'}{h}p - \frac{h''}{h}\right) y, \tag{11}$$

wie man durch Subtraktion von (1) und (10) erkennt. Da von der zugehörigen homogenen Differentialgleichung ein fundamentales Lösungssystem, nämlich $h\,e^{\varrho g}$ und $h\,e^{-\varrho g}$ bekannt ist, ergibt sich für die Lösung von (11) nach der Methode der Variation der Konstanten, wenn man zur Abkürzung

$$s(x) = \frac{1}{g'}\left(r - \frac{h'p}{h} - \frac{h''}{h}\right)$$

setzt,

$$\eta(x,\varrho) = \frac{1}{2\varrho}\left\{h(x)\,e^{\varrho g(x)}\left[\int_{x_0}^{x} s(\xi)\,y(\xi,\varrho)\,h^{-1}(\xi)\,e^{-\varrho g(\xi)}\,d\xi + c_1(\varrho)\right] - \right. \tag{12}$$

$$\left. - h(x)\,e^{-\varrho g(x)}\left[\int_{x_0}^{x} s(\xi)\,y(\xi,\varrho)\,h^{-1}(\xi)\,e^{\varrho g(\xi)}\,d\xi + c_2(\varrho)\right]\right\}.$$

Die Ableitung hiervon lautet

$$\eta'(x,\varrho) = \frac{1}{2\varrho}\left\{\left(\varrho h(x)\,g'(x) + h'(x)\right)e^{\varrho g(x)}\left[\int_{x_0}^{x} s\,y\,h^{-1}e^{-\varrho g}\,d\xi + c_1(\varrho)\right] - \right. \tag{12'}$$

$$\left. - \left(-\varrho h(x)\,g'(x) + h'(x)\right)e^{-\varrho g(x)}\left[\int_{x_0}^{x} s\,y\,h^{-1}e^{\varrho g}\,d\xi + c_2(\varrho)\right]\right\}.$$

Zur Bestimmung der Integrationskonstanten c_1 und c_2 setzen wir in diesen Gleichungen $x = x_0$. Da nach (9)

$$\eta(x_0,\varrho) = \eta'(x_0,\varrho) = 0$$

ist, so folgt

$$c_1(\varrho) = c_2(\varrho) = 0. \tag{13}$$

Wenn wir in (12) für die linke Seite wieder $y - \mathfrak{y}$ schreiben und die Gleichung mit $h^{-1}e^{-\varrho g}$ multiplizieren, so ergibt sich

$$y(x)\,h^{-1}(x)\,e^{-\varrho g(x)} \tag{14}$$

$$= 1 + \frac{1}{2\varrho}\left\{\int_{x_0}^{x} s\,y\,h^{-1}\,e^{-\varrho g(\xi)}\,d\xi - e^{-2\varrho g(x)}\int_{x_0}^{x} s\,y\,h^{-1}\,e^{-\varrho g(\xi)}\cdot e^{2\varrho g(\xi)}\,d\xi\right\}.$$

Es sei nun $M = M(\varrho)$ das Maximum, das $|y(x)h^{-1}(x)\,e^{-\varrho g(x)}|$ auf dem von x_0 nach x_1 führenden Wege C des Satzes I annimmt, und zwar möge es im Punkte X angenommen werden. Bildet man (14) insbesondere für $x = X$, indem man die Integrale von x_0 bis X längs C nimmt, so folgt, weil

$$|e^{2\varrho g(\xi)}| = e^{2\varrho\,\Re(g(\xi))}$$

nach der Annahme des Satzes I im Endpunkte X des Integrationsweges sein Maximum annimmt,

$$M \leqq 1 + \frac{1}{2\varrho}\left\{M\int_{x_0}^{X}|s(\xi)\,d\xi| + M\int_{x_0}^{X}|s(\xi)\,d\xi|\right\}$$

und daher

$$M(\varrho) = O(1).$$

Geht man mit dieser Abschätzung von M nochmals in die Gleichung (12) hinein, so ergibt sich

$$y(x,\varrho) = h(x)\,e^{\varrho g(x)} + \vartheta(x,\varrho)\cdot\varrho^{-1}\cdot e^{\varrho g(x)} \tag{15}$$

mit

$$\begin{aligned}|\vartheta(x,\varrho)| &= \tfrac{1}{2}\,|h(x)|\cdot\Big|\int_{x_0}^{x} s(\xi)\,y(\xi,\varrho)\,h^{-1}(\xi)\,e^{-\varrho g(\xi)}\,d\xi - \\ &\qquad - e^{-2\varrho g(x)}\cdot\int_{x_0}^{x} s(\xi)\,y(\xi,\varrho)\,h^{-1}(\xi)\,e^{-\varrho g(\xi)}\cdot e^{2\varrho g(\xi)}\,d\xi\Big| \\ &\leqq \tfrac{1}{2}\,|h(x)|\,2M\int_{x_0}^{x_1}|s(\xi)\,d\xi|\,.\end{aligned}$$

Es gilt also $\vartheta(x,\varrho) = O(1)$ gleichmäßig für alle x auf C.

Eine der Formel (15) entsprechende Formel gilt für die Ableitung $y'(x,\varrho)$. Wir gehen auf (12′) zurück und finden

$$y'(x,\varrho) = \big(h(x)\,e^{\varrho g(x)}\big)' + \tau(x,\varrho)\,e^{\varrho g(x)} \tag{16}$$

mit

$$\begin{aligned}|\tau(x,\varrho)| &= \tfrac{1}{2}\,\varrho^{-1}\Big|\big(h'(x)+\varrho h(x)\,g'(x)\big)\int_{x_0}^{x} s(\xi)\,y(\xi,\varrho)\,h^{-1}(\xi)e^{-\varrho g(\xi)}\,d\xi - \\ &\quad - \big(h'(x)-\varrho h(x)\,g'(x)\big)\,e^{-2\varrho g(x)}\cdot\int_{x_0}^{x} s(\xi)\,y(\xi,\varrho)\,h^{-1}(\xi)\,e^{-\varrho g(\xi)}\cdot e^{2\varrho g(\xi)}\,d\xi\Big| \\ &\leqq \tfrac{1}{2}\,\varrho^{-1}\Big\{|h'(x)+\varrho\,h(x)\,g'(x)|\,M\int_{x_0}^{x_1}|s(\xi)\,d\xi| + \\ &\qquad + |h'(x)-\varrho h(x)\,g'(x)|\,M\int_{x_0}^{x_1}|s(\xi)\,d\xi|\Big\}.\end{aligned}$$

Somit gilt $\tau(x,\varrho) = O(1)$ gleichmäßig für alle x auf C.

Nach dem bisher Bewiesenen gibt es eine Lösung $y = y^{+}(x,\varrho)$ unserer Differentialgleichung (1), die längs C durch $he^{\varrho g}$ asymptotisch dargestellt wird, d. h. es gilt gleichmäßig in x auf C

$$\begin{aligned}y^{+}(x,\varrho) &= h(x)\,e^{\varrho g(x)} + \varrho^{-1}\,e^{\varrho g(x)}\cdot O(1), \\ y^{+\prime}(x,\varrho) &= \big(h'(x)+\varrho h(x)\,g'(x)\big)\,e^{\varrho g(x)} + e^{\varrho g(x)}\cdot O(1).\end{aligned} \tag{17}$$

Hätten wir in $g = \int \sqrt{q}\, dx$ das andere Vorzeichen der Wurzel gewählt, so wären wir durch Betrachtung der rückwärts, von x_1 nach x_0 durchlaufenen Kurve C zu einer Lösung $y^-(x, \varrho)$ der Differentialgleichung (1) gelangt, die längs C durch $he^{-\varrho g}$ asymptotisch dargestellt wird:

$$(18)\qquad \begin{aligned} y^-(x, \varrho) &= h(x)\, e^{-\varrho g(x)} + \varrho^{-1} e^{-\varrho g(x)} \cdot O(1), \\ y^{-\prime}(x, \varrho) &= \big(h'(x) - \varrho h(x)\, g'(x)\big) e^{-\varrho g(x)} + e^{-\varrho g(x)} \cdot O(1). \end{aligned}$$

Es sei nun $\mathfrak{y}$ die Funktion (6)

$$\mathfrak{y}(x, \varrho) = e^{\varrho g(x)} \big(h(x) + \varrho^{-1} h_1(x) + \cdots + \varrho^{-m} h_m(x)\big).$$

$\mathfrak{y}$ genügt nicht der Differentialgleichung $L(\mathfrak{y}) = 0$, sondern es wird nach (3)

$$(19)\qquad L(\mathfrak{y}) = -\varrho^{-m} e^{\varrho g(x)} \cdot F(x)$$

mit

$$F(x) = -\left(h_m'' + p h_m' - r h_m\right).$$

$y(x, \varrho)$ sei jetzt eine Lösung der Differentialgleichung (1), die durch $\mathfrak{y}$ im Punkte x_0 asymptotisch dargestellt wird:

$$(20)\qquad \begin{aligned} y(x_0, \varrho) &= \mathfrak{y}(x_0, \varrho) + \varrho^{-m-1} \cdot e^{\varrho g(x_0)} \cdot O(1), \\ y'(x_0, \varrho) &= \mathfrak{y}'(x_0, \varrho) + \varrho^{-m} \cdot e^{\varrho g(x_0)} \cdot O(1). \end{aligned}$$

Setzt man wieder

$$\eta(x, \varrho) = y(x, \varrho) - \mathfrak{y}(x, \varrho),$$

so ergibt Subtraktion von $L(y) = 0$ und (19)

$$(21)\qquad L(\eta) = \varrho^{-m} \cdot e^{\varrho g(x)} \cdot F(x).$$

Von der zugehörigen homogenen Differentialgleichung kennt man die beiden linear unabhängigen Lösungen y^+ und y^-. Somit erhält man nach der Methode der Variation der Konstanten für die Lösung η von (21)

$$(22)\quad \eta(x, \varrho) = \varrho^{-m} \Big\{ y^-(x, \varrho) \Big[\int_{x_0}^{x} \frac{y^+(\xi, \varrho)}{D(\xi, \varrho)} \cdot e^{\varrho g(\xi)} \cdot F(\xi)\, d\xi + \gamma_1(\varrho) \Big] - y^+(x, \varrho) \Big[\int_{x_0}^{x} \frac{y^-(\xi, \varrho)}{D(\xi, \varrho)} \cdot e^{\varrho g(\xi)} \cdot F(\xi)\, d\xi + \gamma_2(\varrho) \Big] \Big\},$$

worin

$$D = \begin{vmatrix} y^+ & y^- \\ y^{+\prime} & y^{-\prime} \end{vmatrix}$$

die Wronskische Determinante der beiden Lösungen y^+ und y^- bezeichnet und γ_1, γ_2 Integrationskonstanten bedeuten. Aus (22) folgt durch Differentiation nach x

$$(23)\qquad \eta'(x,\varrho) = \varrho^{-m}\Big\{y^{-\prime}(x,\varrho)\Big[\int_{x_0}^{x}\frac{y^+(\xi,\varrho)}{D(\xi,\varrho)}\cdot e^{\varrho g(\xi)}\cdot F(\xi)\,d\xi+\gamma_1(\varrho)\Big]- \\ - y^{+\prime}(x,\varrho)\Big[\int_{x_0}^{x}\frac{y^-(\xi,\varrho)}{D(\xi,\varrho)}\cdot e^{\varrho g(\xi)}\cdot F(\xi)\,d\xi+\gamma_2(\varrho)\Big]\Big\}.$$

Insbesondere ist für $x = x_0$

$$\varrho^m\eta(x_0,\varrho) = \gamma_1 y^-(x_0,\varrho) - \gamma_2 y^+(x_0,\varrho),$$
$$\varrho^m\eta'(x_0,\varrho) = \gamma_1 y^{-\prime}(x_0,\varrho) - \gamma_2 y^{+\prime}(x_0,\varrho);$$

hieraus folgt durch Auflösen unter Benutzung der Relationen (17), (18), (20)

$$\gamma_1(\varrho) = \frac{\varrho^m}{D}\cdot\begin{vmatrix} y^+ & \eta\\ y^{+\prime} & \eta'\end{vmatrix} = \varrho^m\cdot\frac{\begin{vmatrix} e^{\varrho g(x_0)}\cdot O(1) & \varrho^{-m-1}e^{\varrho g(x_0)}O(1)\\ \varrho\,e^{\varrho g(x_0)}\cdot O(1) & \varrho^{-m}e^{\varrho g(x_0)}O(1)\end{vmatrix}}{-2\varrho h^2(x_0)g'(x_0)+O(1)} = \varrho^{-1}\cdot e^{2\varrho g(x_0)}\cdot O(1);$$

$$\gamma_2(\varrho) = -\frac{\varrho^m}{D}\begin{vmatrix}\eta & y^-\\ \eta' & y^{-\prime}\end{vmatrix} = -\varrho^m\cdot\frac{\begin{vmatrix}\varrho^{-m-1}\cdot e^{\varrho g(x_0)}\cdot O(1) & e^{-\varrho g(x_0)}\cdot O(1)\\ \varrho^{-m}\cdot e^{\varrho g(x_0)}\cdot O(1) & \varrho\,e^{-\varrho g(x_0)}\cdot O(1)\end{vmatrix}}{-2\varrho h^2(x_0)g'(x_0)+O(1)} = \frac{1}{\varrho}O(1).$$

Somit wird aus (22) für x auf C:

$$\eta(x,\varrho) = \varrho^{-m}\Big\{e^{-\varrho g(x)}\cdot a_1(x,\varrho)\cdot\Big[\int_{x_0}^{x}\frac{e^{2\varrho g(\xi)}}{\varrho}\cdot b_1(\xi,\varrho)\,d\xi + \frac{e^{2\varrho g(x_0)}}{\varrho}c_1(\varrho)\Big]- \\ - e^{\varrho g(x)}\cdot a_2(x,\varrho)\Big[\int_{x_0}^{x}\frac{b_2(\xi,\varrho)}{\varrho}\,d\xi+\frac{c_2(\varrho)}{\varrho}\Big]\Big\},$$

worin a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2 für x auf C und hinreichend große ϱ gleichmäßig beschränkte Funktionen sind, die nicht näher bezeichnet zu werden brauchen. Bedenkt man nun wieder, daß

$$|e^{\varrho g(\xi)}| = e^{\varrho\,\Re(g(\xi))}$$

längs C nicht abnimmt, so folgt ähnlich wie oben

$$|\eta(x,\varrho)| \leqq A\,\varrho^{-m-1}\cdot|e^{\varrho g(x)}|.$$

Darin ist A eine von x und ϱ unabhängige Konstante und die Ungleichung gilt für alle x auf C und alle genügend großen ϱ. Ebenso folgt aus (23)

$$|\eta'(x,\varrho)| \leqq A'\varrho^{-m}\cdot|e^{\varrho g(x)}| \qquad (A' = \text{const}),$$

womit Satz 1 bewiesen ist.

Als Beispiel betrachten wir die Differentialgleichung

$$y'' + py' - (\varrho^2 x + r)y = 0, \tag{24}$$

in der $p(x)$, $r(x)$ in der ganzen x-Ebene regulär analytisch seien; es ist hier $q(x) = x$. Als Gebiet $\mathfrak{G}$ können wir die x-Ebene betrachten, aus der die negative reelle Achse einschließlich des Nullpunktes herausgenommen ist. Man hat

$$g = \int \sqrt{x}\, dx = \pm \tfrac{2}{3} x^{\frac{3}{2}}$$

und

$$h = \frac{1}{\sqrt[4]{x}}\, e^{-\frac{1}{2}\int p\, dx}.$$

Brechen wir die asymptotische Entwicklung nach dem ersten Gliede ab, so ergeben sich die beiden asymptotischen Lösungen

$$\mathfrak{y}^+(x, \varrho) = h \cdot e^{\frac{2}{3}\varrho x^{\frac{3}{2}}} \quad \text{und} \quad \mathfrak{y}^-(x, \varrho) = h \cdot e^{-\frac{2}{3}\varrho x^{\frac{3}{2}}},$$

wobei wir von den mehrdeutigen Funktionen $x^{\frac{3}{2}}$ und $\sqrt[4]{x}$ in der aufgeschnittenen x-Ebene diejenigen Zweige benutzen wollen, die auf der positiven reellen Achse positiv sind. — Die Kurven $\Re(g) = \text{const}$ zeigt die Fig. 1. Weiß man von einer Lösung $y = y^+(x, \varrho)$ der Differentialgleichung (24), daß sie in einem Punkte $x_0 > 0$ asymptotisch durch $\mathfrak{y}^+(x, \varrho)$ dargestellt wird, so ist dies nach Satz 1 zugleich für alle Punkte x der Fall, für die

$$\Re(\tfrac{2}{3} x^{\frac{3}{2}}) \geqq \Re(\tfrac{2}{3} x_0^{\frac{3}{2}})$$

ist, das sind die auf der gestrichelten Kurve und rechts von ihr liegenden Punkte. Dagegen wird eine Lösung $y^-(x, \varrho)$, die in x_0 asymptotisch durch $\mathfrak{y}^-(x, \varrho)$ dargestellt wird, zugleich in allen Punkten x von $\mathfrak{G}$ dargestellt, für die

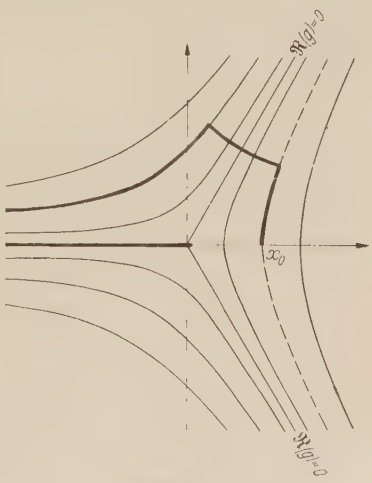

Fig. 1.

$$\Re(-\tfrac{2}{3} x^{\frac{3}{2}}) \geqq \Re(-\tfrac{2}{3} x_0^{\frac{3}{2}})$$

ist; das sind die auf der gestrichelten Kurve und links davon liegenden Punkte. Auf Kurven, auf denen $\Re(-\frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}})$ niemals abnimmt, kann man von x_0 aus in beliebige Nähe der negativen reellen Achse gelangen, wie die in Fig. 1 stark ausgezogene, aus Stücken von Niveaulinien und Fallinien von $\Re(x^{\frac{3}{2}})$

bestehende Kurve zeigt. Dagegen kann man die negative Achse selbst auf solchen Kurven nicht erreichen (auch wenn sie zu $\mathfrak{G}$ gehörte, was durch Abänderung des Schnittes sich bewirken läßt). Denn an die negative reelle Achse schließt sich in beiden Halbebenen ein Gebiet an, in dem $\Re(-\frac{2}{3}\sqrt[3]{x^2}) > 0$ ist; auf der negativen Achse aber ist $\Re(-\frac{2}{3}\sqrt[3]{x^2}) = 0$. In der Tat werden wir in § 2 sehen, daß das asymptotische Verhalten von $y^-(x, \varrho)$ auf der negativen Achse ein ganz anderes als in beliebiger Nähe der negativen Achse ist.

§ 2.

Differentialgleichungen mit reellen Koeffizienten.

Von besonderem Interesse ist der Fall, daß die Koeffizienten $p(x)$, $q(x)$, $r(x)$ der Differentialgleichung (1) für reelle x reellwertige analytische Funktionen sind. Ist dann in einem abgeschlossenen Intervalle der reellen Achse $q(x) > 0$, so wird $g = \int \sqrt{q}\, dx$ bei geeigneter Wahl der Integrationskonstante reell. Dann haben die reellen Lösungen der Differentialgleichung (1), wie der Faktor $e^{\varrho g}$ in der asymptotischen Lösung zeigt, „aperiodische" Gestalt. Wir nennen das Intervall *aperiodisch*. Ist dagegen in einem abgeschlossenen Intervall $q(x) < 0$, so wird $g = \int \sqrt{q}\, dx$ bei geeigneter Wahl der Integrationskonstante rein imaginär, und die reellen Lösungen der Differentialgleichung (1) zeigen „oszillatorischen" Verlauf. Wir sprechen von einem *oszillatorischen* Intervall. Wenn eine Lösung $y(x, \varrho)$ der Differentialgleichung (1) in einem Punkte x_0 eines aperiodischen Intervalles asymptotisch durch eine asymptotische Lösung $\mathfrak{y}(x, \varrho)$ dargestellt wird, so gilt nach Satz I diese Darstellung jedenfalls in allen Punkten des Intervalles, in denen $g(x) \geqq g(x_0)$ ist, dagegen nicht notwendig in den übrigen Punkten des Intervalles. Liegt aber x_0 in einem oszillatorischen Intervall, so gilt die asymptotische Darstellung nach Satz I von selbst in dem ganzen Intervall, da in ihm $\Re(g) = \text{const} = 0$ ist.

Zwischen den aperiodischen und den oszillatorischen Intervallen liegen Nullstellen von $q(x)$. Sie sind für die Differentialgleichung und daher auch für ihre Lösungen $y(x, \varrho)$ keine singulären Stellen, wohl aber singuläre Stellen, nämlich Verzweigungspunkte, für die asymptotischen Lösungen $\mathfrak{y}(x, \varrho)$, wie die Ausdrücke (4) und (5) für g und h zeigen.

Wenn $y(x, \varrho)$ in einem Punkte der reellen Achse asymptotisch durch $\mathfrak{y}(x, \varrho)$ dargestellt wird, so erhebt sich die Frage, wie $y(x, \varrho)$ in einem anderen Punkte der reellen Achse dargestellt werden kann, der von ersterem durch eine Nullstelle von $q(x)$ getrennt ist. Diese Frage soll im folgenden behandelt werden.

Wir setzen voraus: Die Koeffizienten $p(x)$, $q(x)$, $r(x)$ der Differentialgleichung (1) sind in einer Umgebung des Nullpunktes $x = 0$ reguläre und

für reelle x reellwertige analytische Funktionen. $q(x)$ habe im Punkte $x = 0$ eine einfache Nullstelle:

$$q(x) = a_1 x + a_2 x^2 + \cdots,$$

wobei $a_1 > 0$ vorausgesetzt werden kann; denn durch Ersetzen von x durch $-x$ ist das immer erreichbar.

Um Satz I anwenden zu können, führen wir zunächst das dort zugrunde gelegte Gebiet $\mathfrak{G}$ ein. $\mathfrak{G}$ entstehe aus einem den Nullpunkt enthaltenden konvexen Gebiete durch Entfernen der negativen imaginären Achse einschließlich des Nullpunktes und sei so klein gewählt, daß p, q, r in $\mathfrak{G}$ keine singuläre Stelle haben und q nirgends in $\mathfrak{G}$ verschwindet. Die Integrationskonstante in (4) legen wir dadurch fest, daß wir $x = 0$ zum Anfangspunkt der Integration machen. Den beiden möglichen Vorzeichen der Wurzel in (4) entsprechend unterscheiden wir die beiden Funktionen

$$g^+ = \int_0^x \sqrt{q(\xi)}\, d\xi \quad \text{und} \quad g^- = -g^+. \tag{25}$$

In g^+ ist dabei die Wurzel positiv gewählt für $\xi > 0$. Damit wird auch $g^+(x) > 0$ für $x > 0$. Für g^+ schreiben wir der Einfachheit halber zumeist g, für g^- ebenso $-g$. Die aus den Differentialgleichungen (3) bei Benutzung von g^+ zu bestimmenden Funktionen h, h_1, h_2, ... bezeichnen wir jetzt genauer mit

$$h^+,\ h_1^+,\ h_2^+,\ \ldots$$

Hätten wir in (3) die Funktion g^- benutzt, so hätten wir durch Integration andere Funktionen h, h_1, h_2, ... erhalten, die wir mit

$$h^-,\ h_1^-,\ h_2^-,\ \ldots$$

bezeichnen. Wir gelangen so zu den beiden asymptotischen Lösungen

$$(26^+) \quad \mathfrak{y}^+ = \mathfrak{y}^+(x, \varrho) = e^{\varrho g(x)} \left(h^+(x) + \varrho^{-1} h_1^+(x) + \cdots + \varrho^{-m} h_m^+(x)\right)$$

$$(26^-) \quad \mathfrak{y}^- = \mathfrak{y}^-(x, \varrho) = e^{-\varrho g(x)} \left(h^-(x) + \varrho^{-1} h_1^-(x) + \cdots + \varrho^{-m} h_m^-(x)\right).$$

Sie sind für jedes positive ϱ in ganz $\mathfrak{G}$ regulär analytische Funktionen von x. Dagegen ist der nicht zu $\mathfrak{G}$ gehörige Punkt $x = 0$, wie gesagt, eine singuläre Stelle.

Da wir die für reelle x reellwertigen Lösungen der Differentialgleichung (1) untersuchen wollen, so werden wir auch von den asymptotischen Lösungen $\mathfrak{y}^+$ und $\mathfrak{y}^-$ voraussetzen, daß sie für positive x reellwertig sind. Diese Voraussetzung ist deshalb erfüllbar, weil für $x > 0$ die Funktionen p, q, r, g und damit die Koeffizienten in den zur Bestimmung von h, h_1, h_2, ... dienenden Differentialgleichungen (3) reell sind. Für $x < 0$ sind dann $\mathfrak{y}^+$ und $\mathfrak{y}^-$ sicher nicht reell, da g rein imaginär wird.

Wir wählen nun auf der positiven reellen Achse einen Punkt x_p und auf der negativen reellen Achse einen Punkt x_n. Selbstverständlich sollen diese wie alle im folgenden eingeführten Punkte zum Gebiete $\mathfrak{G}$ gehören. Über den Zusammenhang zwischen den asymptotischen Darstellungen einer bestimmten Lösung von (1) in den Punkten x_n und x_p gelten folgende Sätze.

Satz II. *Es sei* $\mathfrak{y}^-(x, \varrho)$ *die für* $x > 0$ *reellwertige asymptotische Lösung* (26^-) *und* $y^-(x, \varrho)$ *eine für reelle* x *reellwertige Lösung der Differentialgleichung* (1), *die im Punkte* x_p *asymptotisch durch* $\mathfrak{y}^-(x, \varrho)$ *darstellbar ist*:

$$\begin{aligned} y^-(x_p, \varrho) &= \mathfrak{y}^-(x_p, \varrho) + \varrho^{-m-1} e^{-\varrho g(x_p)} O(1), \\ y^{-\prime}(x_p, \varrho) &= \mathfrak{y}^{-\prime}(x_p, \varrho) + \varrho^{-m} e^{-\varrho g(x_p)} O(1), \end{aligned} \tag{27}$$

dann gilt im Punkte x_n *die Darstellung*

$$\begin{aligned} y^-(x_n, \varrho) &= 2\,\Re\left(\mathfrak{y}^-(x_n, \varrho)\right) + \varrho^{-m-1} O(1), \\ y^{-\prime}(x_n, \varrho) &= 2\,\Re\left(\mathfrak{y}^{-\prime}(x_n, \varrho)\right) + \varrho^{-m} O(1). \end{aligned} \tag{28}$$

Beweis in § 3.

Das Gegenstück zu diesem Satze ist der

Satz III: *Es sei* $\mathfrak{y}^+(x, \varrho)$ *die für* $x > 0$ *reellwertige asymptotische Lösung* (26^+) *und* $y^+(x, \varrho)$ *eine für reelle* x *reellwertige Lösung der Differentialgleichung* (1), *die im Punkte* x_n *die Darstellung besitzt*

$$\begin{aligned} y^+(x_n, \varrho) &= \Re\left(\mathfrak{y}^+(x_n, \varrho)\right) + \varrho^{-m-1} O(1), \\ y^{+\prime}(x_n, \varrho) &= \Re\left(\mathfrak{y}^{+\prime}(x_n, \varrho)\right) + \varrho^{-m} O(1), \end{aligned} \tag{29}$$

dann gilt im Punkte x_p *die Darstellung*

$$\begin{aligned} y^+(x_p, \varrho) &= \mathfrak{y}^+(x_p, \varrho) + \varrho^{-m-1} e^{\varrho g(x_p)} O(1), \\ y^{+\prime}(x_p, \varrho) &= \mathfrak{y}^{+\prime}(x_p, \varrho) + \varrho^{-m} e^{\varrho g(x_p)} O(1). \end{aligned} \tag{30}$$

Beweis in § 4.

Man bemerke, daß der Faktor 2, der in (28) auftritt, in (29) fehlt.

Für die Aussage des Satzes II ist es wesentlich, daß die Lösung der Differentialgleichung (1) im Punkte x_p durch $\mathfrak{y}^-$ und nicht etwa durch $\mathfrak{y}^+$ asymptotisch dargestellt wird. Betrachtet man eine Lösung $y(x, \varrho)$, für die im Punkte x_p gilt,

$$\begin{aligned} y(x_p, \varrho) &= \mathfrak{y}^+(x_p, \varrho) + \varrho^{-m-1} e^{\varrho g(x_p)} O(1), \\ y'(x_p, \varrho) &= \mathfrak{y}^{+\prime}(x_p, \varrho) + \varrho^{-m} e^{\varrho g(x_p)} O(1), \end{aligned} \tag{31}$$

so kann man daraus noch nicht auf eine asymptotische Darstellung im Punkte x_n schließen. Z. B. erfüllt die Funktion $y^+(x, \varrho)$ des Satzes III die Relationen (31), aber auch die Funktion

$$y^+(x, \varrho) + \varrho^N y^-(x, \varrho),$$

wenn y^- die im Satze II genannte Funktion und N eine positive Zahl ist. Denn es ist nach (30), (27) und (26)

$$\begin{aligned} y^+(x_p, \varrho) + \varrho^N y^-(x_p, \varrho) &= \mathfrak{y}^+(x_p, \varrho) + \varrho^{-m-1} e^{\varrho g(x_p)} O(1) + \\ &+ \varrho^N \{\mathfrak{y}^-(x_p, \varrho) + \varrho^{-m-1} e^{-\varrho g(x_p)} O(1)\} \\ &= \mathfrak{y}^+(x_p, \varrho) + \varrho^{-m-1} e^{\varrho g(x_p)} O(1), \end{aligned}$$

und entsprechendes gilt für die Ableitung. Das Zusatzglied $\varrho^N y^-$ macht also asymptotisch im Punkte x_p nichts aus, wohl aber im Punkte x_n. Denn dort ist wegen (29) und (28)

$$\begin{aligned} y^+(x_n, \varrho) + \varrho^N y^-(x_n, \varrho) &= \Re\left(\mathfrak{y}^+(x_n, \varrho)\right) + \varrho^{-m-1} O(1) + \\ &+ \varrho^N \{2\,\Re\left(\mathfrak{y}^-(x_n, \varrho)\right) + \varrho^{-m-1} O(1)\}. \end{aligned}$$

Jetzt nimmt das Zusatzglied $\varrho^N y^-$ für unendlich wachsendes ϱ beliebig große Werte an, während y^+ beschränkt bleibt.

Ebenso ist es für die Aussage des Satzes III wesentlich, daß die Lösung der Differentialgleichung (1) im Punkte x_n asymptotisch durch $\Re(\mathfrak{y}^+(x_n, \varrho))$ und nicht etwa durch $\Re(\mathfrak{y}^-(x_n, \varrho))$ dargestellt wird. Betrachtet man eine Lösung, für die im Punkte x_n gilt

$$\begin{aligned} y(x_n, \varrho) &= \Re\left(\mathfrak{y}^-(x_n, \varrho)\right) + \varrho^{-m-1} O(1), \\ y'(x_n, \varrho) &= \Re\left(\mathfrak{y}^{-\prime}(x_n, \varrho)\right) + \varrho^{-m} O(1), \end{aligned} \tag{32}$$

so kann man daraus noch nicht auf eine asymptotische Darstellung im Punkte x_p schließen. Z. B. erfüllt die Funktion $\frac{1}{2} y^-(x, \varrho)$ des Satzes II die Relationen (32), aber auch die Funktion $\frac{1}{2} y^- + \varrho^{-N} y^+$, wo y^+ die im Satze III genannte Funktion und N eine positive Zahl $\geqq m+1$ ist. Denn es ist nach (28) und (29)

$$\begin{aligned} \tfrac{1}{2} y^-(x_n, \varrho) + \varrho^{-N} y^+(x_n, \varrho) &= \Re\left(\mathfrak{y}^-(x_n, \varrho)\right) + \varrho^{-m-1} O(1) + \\ &+ \varrho^{-N} \{\Re\left(\mathfrak{y}^+(x_n, \varrho)\right) + \varrho^{-m-1} O(1)\} \\ &= \Re\left(\mathfrak{y}^-(x_n, \varrho)\right) + \varrho^{-m-1} O(1), \end{aligned}$$

und entsprechendes gilt für die Ableitung. Das Zusatzglied $\varrho^{-N} y^+$ macht also asymptotisch im Punkte x_n nichts aus, wohl aber im Punkte x_p. Denn dort ist wegen (27) und (30)

$$\begin{aligned} \tfrac{1}{2} y^-(x_p, \varrho) + \varrho^{-N} y^+(x_p, \varrho) &= \tfrac{1}{2} \mathfrak{y}^-(x_p, \varrho) + \varrho^{-m-1} e^{-\varrho g(x_p)} O(1) \\ &+ \varrho^{-N} \{\mathfrak{y}^+(x_p, \varrho) + \varrho^{-m-1} e^{\varrho g(x_p)} O(1)\}. \end{aligned}$$

Jetzt geht wegen (26) das Zusatzglied $\varrho^{-N} y^+(x_p, \varrho)$ nach ∞, während $\frac{1}{2} y^-(x_p, \varrho)$ nach 0 konvergiert.

In Satz I haben wir aus der Gültigkeit einer asymptotischen Darstellung in einem Punkte auf ihre Gültigkeit längs der Kurve C geschlossen. Ein ähnlicher Satz besteht für die asymptotischen Relationen der Art (28) und (29) für Intervalle der negativen reellen Achse:

Satz IV. *Sei* $\mathfrak{y}(x, \varrho)$ *eine der beiden asymptotischen Lösungen* (26^-) *und* (26^-), *die für* $x > 0$ *reell sind, und* $y(x, \varrho)$ *eine Lösung der Differentialgleichung* (1). *die in einem einzigen Punkte* $x_n < 0$ *dargestellt wird durch*

$$(33) \qquad \begin{aligned} y(x, \varrho) &= \Re(\mathfrak{y}(x, \varrho)) + \varrho^{-m-1} O(1) \\ y'(x, \varrho) &= \Re(\mathfrak{y}'(x, \varrho)) + \varrho^{-m} O(1); \end{aligned}$$

dann gelten solche Relationen gleichmäßig (im Sinne der Fußnote 2 von S. 176) für alle x *in jedem abgeschlossenen, den Nullpunkt nicht enthaltenden und selbstverständlich zum Gebiete* $\mathfrak{G}$ *gehörigen Intervalle* $\mathfrak{n}$ *der negativen reellen Achse.*

Beweis in § 5.

§ 3.

Beweis von Satz II.

Wenn man die in $\mathfrak{G}$ definierte Funktion $\mathfrak{y}^-(x, \varrho)$ analytisch fortsetzt, indem man die negative imaginäre Achse von rechts nach links überschreitet, so gelangt man in einen anderen Zweig dieser Funktion, den wir mit $\mathfrak{z}^+(x, \varrho)$ bezeichnen wollen. Da $\mathfrak{y}^-$ auf der positiven reellen Achse reell ist, so sind $\mathfrak{y}^-$ und $\mathfrak{z}^+$ auf der negativen reellen Achse konjugiert komplex. Natürlich ist die Funktion $\mathfrak{z}^+$, da sie nur ein anderer Zweig von $\mathfrak{y}^-$ ist, ebenfalls asymptotische Lösung von (1) im Sinne von § 1 (6). Der in $\mathfrak{z}^+$ auftretende Exponentialfaktor heißt aber $e^{+\varrho g}$ und nicht $e^{-\varrho g}$ wie in $\mathfrak{y}^-$. Denn wir befinden uns in dem anderen Blatte der zweiwertigen Funktion g. $\mathfrak{z}^+$ hat also die Gestalt

$$(34) \quad \mathfrak{z}^+(x, \varrho) = e^{\varrho g(x)} \left(k^+(x) + \varrho^{-1} k_1^+(x) + \varrho^{-2} k_2^+(x) + \cdots + \varrho^{-m} k_m^+(x)\right).$$

Die Funktionen k^+, k_1^+, k_2^+, ..., k_m^+ entstehen durch die genannte analytische Fortsetzung aus $k^-, k_1^-, k_2^-, \ldots, k_m^-$. — Es vereinfacht den Beweis des Satzes II, wenn man die asymptotische Lösung $\mathfrak{z}^+$ an Stelle der in (26^+) eingeführten $\mathfrak{y}^+$ verwendet. Da k^+ wegen des in (5) auftretenden Faktors $\sqrt[4]{q}$ für $x > 0$ rein imaginär wird, so stimmt $\mathfrak{z}^+$ jedenfalls nicht mit $\mathfrak{y}^+$ überein.

Wir bemerken weiter, daß man in der oberen Halbebene einen so kleinen Halbkreis $\overset{\frown}{x_l x_r}$ mit dem Mittelpunkte $x = 0$ ziehen kann, daß bei seiner Durchlaufung $\Re(g)$ bis zu einem gewissen Punkte x_0 abnimmt und von da an

wieder zunimmt (Fig. 2). Dies erkennt man leicht durch Entwicklung von $g(x)$ in der Umgebung des Nullpunktes:

$$g(x) = \tfrac{2}{3}\sqrt{a_1}\, x^{\frac{3}{2}}(1 + x\,\mathfrak{P}(x));$$

$\mathfrak{P}(x)$ steht abkürzend für eine Potenzreihe in x. Der Halbkreis sei überdies so klein, daß $x_n < x_l$, $x_r < x_p$ wird. Wir bezeichnen den Linienzug $x_p x_r x_0 x_l x_n$, der in der Fig. 2 stark ausgezogen ist, mit C_{pn} und seine beiden Teile, in die er durch den Punkt x_0 zerlegt wird, mit C_{p0} und C_{0n}.

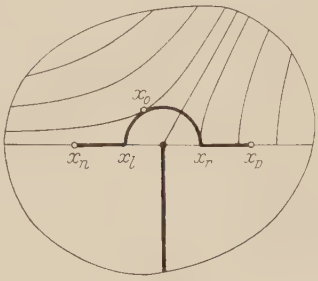

Fig. 2.

Da $\Re(g^-) = \Re(-g)$ längs C_{p0} dauernd zunimmt, gelten nach Satz I für die Funktion y^- des Satzes II gleichmäßig für alle Punkte x auf C_{p0} Relationen von der Form (27)

$$\left.\begin{aligned} y^-(x,\varrho) &= \mathfrak{y}^-(x,\varrho) + \varrho^{-m-1} e^{-\varrho g(x)} O(1) \\ y^{-\prime}(x,\varrho) &= \mathfrak{y}^{-\prime}(x,\varrho) + \varrho^{-m} e^{-\varrho g(x)} O(1) \end{aligned}\right\} x \text{ auf } C_{p0}. \tag{35}$$

Weiter sei y_n^- eine Lösung der Differentialgleichung (1), die im Punkte x_n und damit auf ganz C_{0n} asymptotisch durch $\mathfrak{y}^-$ dargestellt wird. Für sie gelten die Relationen

$$\left.\begin{aligned} y_n^-(x,\varrho) &= \mathfrak{y}^-(x,\varrho) + \varrho^{-m-1} e^{-\varrho g(x)} O(1) \\ y_n^{-\prime}(x,\varrho) &= \mathfrak{y}^{-\prime}(x,\varrho) + \varrho^{-m} e^{-\varrho g(x)} O(1) \end{aligned}\right\} x \text{ auf } C_{0n}, \tag{36}$$

und zwar gleichmäßig für alle x auf C_{0n}.

Schließlich sei z^+ eine Lösung von (1), die im Punkte x_0 und damit auf ganz C_{pn} durch die eben eingeführte asymptotische Lösung $\mathfrak{z}^+$ dargestellt wird:

$$\left.\begin{aligned} z^+(x,\varrho) &= \mathfrak{z}^+(x,\varrho) + \varrho^{-m-1} e^{\varrho g(x)} O(1) \\ z^{+\prime}(x,\varrho) &= \mathfrak{z}^{+\prime}(x,\varrho) + \varrho^{-m} e^{\varrho g(x)} O(1) \end{aligned}\right\} x \text{ auf } C_{pn}, \tag{37}$$

wieder gleichmäßig für alle x auf C_{pn}.

y_n^- und z^+ sind für genügend große ϱ linear unabhängig. Denn die Wronskische Determinante

$$\begin{vmatrix} y_n^- & z^+ \\ y_n^{-\prime} & z^{+\prime} \end{vmatrix}$$

berechnet sich im Punkte x_0 zufolge (36) und (37) zu

$$\begin{aligned} &\begin{vmatrix} \mathfrak{y}^- + \varrho^{-m-1} e^{-\varrho g} O(1) & \mathfrak{z}^+ + \varrho^{-m-1} e^{\varrho g} O(1) \\ \mathfrak{y}^{-\prime} + \varrho^{-m} e^{-\varrho g} O(1) & \mathfrak{z}^{+\prime} + \varrho^{-m} e^{\varrho g} O(1) \end{vmatrix}_{x=x_0} \\ &= \begin{vmatrix} h^- + \varrho^{-1} O(1) & k^+ + \varrho^{-1} O(1) \\ -\varrho g' h^- + O(1) & \varrho g' k^+ + O(1) \end{vmatrix}_{x=x_0} \\ &= 2\,\varrho g'(x_0)\, h^-(x_0)\, k^+(x_0) + O(1). \end{aligned} \tag{38}$$

Dies ist $\neq 0$ für genügend große ϱ; denn nach (4) und (5) verschwinden g', h^- und k^+ nirgends in $\mathfrak{G}$.

Es läßt sich somit y^- linear durch y_n^- und z^+ ausdrücken:

$$y^-(x,\varrho) = s(\varrho)\, y_n^-(x,\varrho) + t(\varrho)\, z^+(x,\varrho); \tag{39}$$

ebenso gilt für die Ableitung

$$y^{-\prime}(x,\varrho) = s(\varrho)\, y_n^{-\prime}(x,\varrho) + t(\varrho)\, z^{+\prime}(x,\varrho). \tag{39'}$$

Bildet man diese Gleichungen insbesondere an der Stelle $x = x_0$, so läßt sich $s(\varrho)$ asymptotisch durch Auflösen der beiden Gleichungen (39) und (39') berechnen unter Benutzung der Relationen (35), (36), (37), die ja im Punkte x_0 gelten:

$$\begin{aligned} s(\varrho) &= \begin{vmatrix} y^- & z^+ \\ y^{-\prime} & z^{+\prime} \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} y_n^- & z^+ \\ y_n^{-\prime} & z^{+\prime} \end{vmatrix} \\ &= \frac{\begin{vmatrix} \mathfrak{y}^- + \varrho^{-m-1} e^{-\varrho g} O(1) & \mathfrak{z}^+ + \varrho^{-m-1} e^{\varrho g} O(1) \\ \mathfrak{y}^{-\prime} + \varrho^{-m} e^{-\varrho g} O(1) & \mathfrak{z}^{+\prime} + \varrho^{-m} e^{\varrho g} O(1) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \mathfrak{y}^- + \varrho^{-m-1} e^{-\varrho g} O(1) & \mathfrak{z}^+ + \varrho^{-m-1} e^{\varrho g} O(1) \\ \mathfrak{y}^{-\prime} + \varrho^{-m} e^{-\varrho g} O(1) & \mathfrak{z}^{+\prime} + \varrho^{-m} e^{\varrho g} O(1) \end{vmatrix}} \\ &= \left\{ \begin{vmatrix} \mathfrak{y}^- & \mathfrak{z}^+ \\ \mathfrak{y}^{-\prime} & \mathfrak{z}^{+\prime} \end{vmatrix} + \varrho^{-m} O(1) \right\} : \left\{ \begin{vmatrix} \mathfrak{y}^- & \mathfrak{z}^+ \\ \mathfrak{y}^{-\prime} & \mathfrak{z}^{+\prime} \end{vmatrix} + \varrho^{-m} O(1) \right\}. \end{aligned}$$

Benutzt man noch (38), so folgt schließlich

$$s(\varrho) = 1 + \varrho^{-m-1} O(1). \tag{40}$$

Zur Bestimmung von $t(\varrho)$ bemerke man, daß y^- für reelle x, also insbesondere für negative x reell ist und daß $\mathfrak{z}^+$ und $\mathfrak{y}^-$ für negative x konjugiert komplex sind. Daher ist

$$\begin{aligned} y^- - \mathfrak{y}^- - \mathfrak{z}^+ = {} & s(\varrho)\{\mathfrak{y}^- + \varrho^{-m-1} c(x,\varrho)\, e^{-\varrho g}\} + \\ & + t(\varrho)\{\mathfrak{z}^+ + \varrho^{-m-1} b(x,\varrho)\, e^{\varrho g}\} - \mathfrak{y}^- - \mathfrak{z}^+ \end{aligned}$$

für negative x reell. Dabei sind die in der ersten Gleichung (36) bzw. (37) auftretenden Faktoren $O(1)$ genauer mit $c(x,\varrho)$ und $b(x,\varrho)$ bezeichnet worden; sie sind gleichmäßig beschränkt für alle x auf C_{0n} bzw. C_{pn}, also jedenfalls für alle x des Intervalles

$$x_n \leqq x \leqq x_l. \tag{41}$$

Für den letzten Ausdruck kann man aber schreiben

$$\begin{aligned} y^- - \mathfrak{y}^- - \mathfrak{z}^+ &= (s(\varrho) - 1)\,\mathfrak{y}^- + (t(\varrho) - 1)\,\mathfrak{z}^+ + \\ &\quad + s(\varrho)\,\varrho^{-m-1} c(x,\varrho)\, e^{-\varrho g} + t(\varrho)\,\varrho^{-m-1} b(x,\varrho)\, e^{\varrho g} \\ &= (t(\varrho) - 1)\,\mathfrak{z}^+ + t(\varrho)\,\varrho^{-m-1} b(x,\varrho)\, e^{\varrho g(x)} + \varrho^{-m-1} f(x,\varrho), \end{aligned} \tag{42}$$

wobei $f(x,\varrho)$ im Intervalle (41) für genügend große ϱ gleichmäßig beschränkt ist, da $|e^{\varrho g}| = 1$ für negative x ist.

Aus der Realität von (42) folgt, daß

$$\varrho^{m+1}(t(\varrho)-1) \tag{43}$$

für $\varrho \to \infty$ beschränkt bleiben muß. Denn wäre das nicht der Fall, so gäbe es eine nach ∞ strebende Folge $\varrho_1, \varrho_2, \ldots$ derart, daß

$$\lim_{\nu\to\infty} \left|\varrho_\nu^{m+1}(t(\varrho_\nu)-1)\right| = \infty \tag{44}$$

wäre. Insbesondere wäre $t(\varrho_\nu) - 1 \neq 0$ für genügend große ϱ_ν, so daß man (42) für solche ϱ_ν auch umformen kann in

$$(t(\varrho_\nu)-1)\left\{\mathfrak{z}^+(x,\varrho_\nu) + \frac{t(\varrho_\nu)}{\varrho_\nu^{m+1}(t(\varrho_\nu)-1)} b(x,\varrho_\nu)\, e^{\varrho_\nu g(x)} + \frac{f(x,\varrho_\nu)}{\varrho_\nu^{m+1}(t(\varrho_\nu)-1)}\right\}. \tag{45}$$

Nun gehen aber die letzten beiden Glieder der geschweiften Klammer wegen (44) für alle x des Intervalles (41) gleichmäßig nach Null, wenn $\nu \to \infty$ geht, so daß man für (45) mit Benutzung von (34) schreiben kann

$$(t(\varrho_\nu)-1)\{k^+(x)\, e^{\varrho_\nu g(x)} + \varepsilon(x,\varrho_\nu)\}, \tag{46}$$

worin

$$\lim_{\nu\to\infty} \varepsilon(x,\varrho_\nu) = 0$$

gleichmäßig für alle x des Intervalles (41) gilt.

Wenn (46) reell sein soll, so muß der Arkus der geschweiften Klammer bei festem ϱ unabhängig von x sein. Wir wählen nun ϱ_ν so groß, daß I. $|\varepsilon(x,\varrho_\nu)| < \frac{1}{2}|k^+(x)|$ für jedes x des Intervalles (41) ist ($|k^+(x)|$ ist in diesem ganzen Intervalle positiv), und II. so groß, daß der Arkus von $e^{\varrho_\nu g(x)}k^+(x)$ in demselben Intervalle um mindestens 2π sich ändert. Auf Grund der ersten Annahme unterscheidet sich der Arkus von $e^{\varrho_\nu g(x)}k^+(x)$ von demjenigen der ganzen geschweiften Klammer um weniger als $\frac{2\pi}{6}$, weil $\sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$ ist, so daß auf Grund der zweiten Annahme der Arkus der Klammer nicht konstant sein kann. $\varrho^{m+1}(t(\varrho)-1)$ bleibt somit für $\varrho \to \infty$ beschränkt. Es gilt also

$$t(\varrho) = 1 + \varrho^{-m-1}\, 0(1). \tag{47}$$

Somit ist im Intervalle (41) nach (35), (36), (40) und (47)

$$\begin{aligned} y^-(x,\varrho) &= s(\varrho)\, y_n^-(x,\varrho) + t(\varrho)\, z^+(x,\varrho) \\ &= \mathfrak{y}^-(x,\varrho) + \mathfrak{z}^+(x,\varrho) + \varrho^{-m-1} O(1) \\ &= 2\,\Re\,(\mathfrak{y}^-(x,\varrho)) + \varrho^{-m-1} O(1). \end{aligned}$$

Damit ist die erste Formel (28) von Satz II bewiesen. Die zweite Formel (28) folgt durch Differentiation:

$$\begin{aligned} y^{-\prime}(x,\varrho) &= s(\varrho)\, y_n^{-\prime}(x,\varrho) + t(\varrho)\, z^{+\prime}(x,\varrho) \\ &= \mathfrak{y}^{-\prime}(x,\varrho) + \mathfrak{z}^{+\prime}(x,\varrho) + \varrho^{-m} O(1) \\ &= 2\,\Re\,(\mathfrak{y}^{-\prime}(x,\varrho)) + \varrho^{-m} O(1). \end{aligned}$$

Der Beweis von Satz II ist damit geführt.

§ 4.

Beweis von Satz III.

Es sei $y^-(x, \varrho)$ die in Satz II eingeführte Lösung der Differentialgleichung (1). Sie ist für reelle x reell und erfüllt in den Punkten x_p und x_n die asymptotischen Relationen (27) und (28). Es sei ferner $y_0^+(x, \varrho)$ eine Lösung der Differentialgleichung (1), die im Punkte x_0 des § 3, Fig. 2 asymptotisch durch $\mathfrak{y}^+(x, \varrho)$ dargestellt wird. Nach Satz I gilt dann diese Darstellung auch in den Punkten x_n und x_p, d. h. es gilt

$$\left.\begin{aligned} y_0^+(x, \varrho) &= \mathfrak{y}^+(x, \varrho) + \varrho^{-m-1} e^{\varrho g(x)} O(1) \\ y_0^{+\prime}(x, \varrho) &= \mathfrak{y}^{+\prime}(x, \varrho) + \varrho^{-m} e^{\varrho g(x)} O(1) \end{aligned}\right\} \quad x = x_n \text{ oder } x_p. \tag{48}$$

Wir haben in y_0^+ und y^- zwei Lösungen von (1), die sowohl im Punkte x_p als im Punkte x_n asymptotisch bekannt sind. Wir berechnen ihre Wronskische Determinante in x_p

$$\begin{vmatrix} y_0^+ & y^- \\ y_0^{+\prime} & y^{-\prime} \end{vmatrix}_{x=x_p} = \begin{vmatrix} \mathfrak{y}^+ + \varrho^{-m-1} e^{\varrho g} O(1) & \mathfrak{y}^- + \varrho^{-m-1} e^{\varrho g} O(1) \\ \mathfrak{y}^{+\prime} + \varrho^{-m} e^{\varrho g} O(1) & \mathfrak{y}^{-\prime} + \varrho^{-m} e^{\varrho g} O(1) \end{vmatrix}_{x=x_p}$$
$$= -2\varrho g'(x_p) h^+(x_p) h^-(x_p) + O(1).$$

Da dieser Wert wegen (4) und (5) $\neq 0$ ist für genügend große ϱ, so sind y_0^+ und y^- für genügend große ϱ linear unabhängig.

Wir hätten die Determinante auch folgendermaßen umformen können:

$$\begin{vmatrix} y_0^+ & y^- \\ y_0^{+\prime} & y^{-\prime} \end{vmatrix}_{x=x_p} = \begin{vmatrix} \mathfrak{y}^+ & \mathfrak{y}^- \\ \mathfrak{y}^{+\prime} & \mathfrak{y}^{-\prime} \end{vmatrix}_{x=x_p} + \varrho^{-m} O(1). \tag{49}$$

Da die rechts stehende Determinante reell ist, so folgt für den Imaginärteil

$$\Im \begin{vmatrix} y_0^- & y^- \\ y_0^{+\prime} & y^{-\prime} \end{vmatrix} = \varrho^{-m} O(1). \tag{50}$$

Dies gilt zunächst im Punkte $x = x_p$, aber ebenso in $x = x_n$. Denn nach einem bekannten Satze ist

$$\begin{vmatrix} y_0^+ & y^- \\ y_0^{+\prime} & y^{-\prime} \end{vmatrix}_{x=x_n} = \begin{vmatrix} y_0^+ & y^- \\ y_0^{+\prime} & y^{-\prime} \end{vmatrix}_{x=x_p} \cdot e^{-\int_{x_p}^{x_n} p(x)\,dx}, \tag{51}$$

und der Exponentialfaktor ist reell. Benutzt man in (50) die asymptotischen Darstellungen (48) und (28) von y_0^+ und y^- im Punkte x_n, so ergibt sich weiter wegen

$$\begin{vmatrix} y_0^+ & y^- \\ y_0^{+\prime} & y^{-\prime} \end{vmatrix}_{x=x_n} = 2 \begin{vmatrix} \Re(\mathfrak{y}^+) & \Re(\mathfrak{y}^-) \\ \Re(\mathfrak{y}^{+\prime}) & \Re(\mathfrak{y}^{-\prime}) \end{vmatrix}_{x=x_n} + 2i \begin{vmatrix} \Im(\mathfrak{y}^+) & \Re(\mathfrak{y}^-) \\ \Im(\mathfrak{y}^{+\prime}) & \Re(\mathfrak{y}^{-\prime}) \end{vmatrix}_{x=x_n} + \varrho^{-m} O(1)$$

die Formel

$$\begin{vmatrix} \Im(\mathfrak{y}^+) & \Re(\mathfrak{y}^-) \\ \Im(\mathfrak{y}^{+\prime}) & \Re(\mathfrak{y}^{-\prime}) \end{vmatrix}_{x=x_n} = \varrho^{-m} O(1). \tag{52}$$

Wir kommen nun zu der Lösung $y^+(x, \varrho)$ des Satzes III. Sie läßt sich linear ausdrücken durch die linear unabhängigen Lösungen y_0^+ und y^-:

$$(53) \qquad \begin{aligned} y^+ &= \alpha(\varrho)\, y_0^+ + \beta(\varrho)\, y^- \\ y^{+\prime} &= \alpha(\varrho)\, y_0^{+\prime} + \beta(\varrho)\, y^{-\prime}. \end{aligned}$$

Zur Berechnung von α und β setzen wir darin $x = x_n$ und finden

$$(54) \qquad \alpha = \frac{\begin{vmatrix} y^+ & y^- \\ y^{+\prime} & y^{-\prime} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} y_0^+ & y^- \\ y_0^{+\prime} & y^{-\prime} \end{vmatrix}} = \frac{\begin{vmatrix} y_0^+ & y^- \\ y^{+\prime} & y^{-\prime} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} y^+ - y_0^+ & y^- \\ y^{+\prime} - y^{+\prime} & y^{-\prime} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} y_0^+ & y^- \\ y_0^{+\prime} & y^{-\prime} \end{vmatrix}}.$$

Die zweite Determinante des Zählers ist nach (48), (29) und (28) gleich

$$\begin{vmatrix} -i\,\Im(\mathfrak{y}^+) + \varrho^{-m-1} O(1) & 2\,\Re(\mathfrak{y}^-) + \varrho^{-m-1} O(1) \\ -i\,\Im(\mathfrak{y}^{+\prime}) + \varrho^{-m} O(1) & 2\,\Re(\mathfrak{y}^{-\prime}) + \varrho^{-m} O(1) \end{vmatrix}$$

$$= -2i \begin{vmatrix} \Im(\mathfrak{y}^+) & \Re(\mathfrak{y}^-) \\ \Im(\mathfrak{y}^{+\prime}) & \Re(\mathfrak{y}^{-\prime}) \end{vmatrix} + \varrho^{-m} O(1) = \varrho^{-m} O(1)$$

wegen (52). Bedenkt man noch, daß die Nennerdeterminante von (54) nach (49) und (51) gleich

$$a\varrho + O(1) \quad (a = \text{const} \neq 0)$$

ist, so folgt

$$\alpha(\varrho) = 1 + \varrho^{-m-1} O(1).$$

Ebenso ergibt sich für $\beta(\varrho)$ der Wert

$$\beta(\varrho) = \begin{vmatrix} y_0^+ & y^+ \\ y_0^{+\prime} & y^{+\prime} \end{vmatrix}_{x=x_n} : \begin{vmatrix} y_0^+ & y^- \\ y_0^{+\prime} & y^{-\prime} \end{vmatrix}_{x=x_n} = O(1),$$

denn die Zählerdeterminante ist auf Grund von (48) und (29) gleich $\varrho\, O(1)$.

Setzt man die gefundenen Abschätzungen von α und β in (53) ein, so ergibt sich

$$\begin{aligned} y^+(x_p, \varrho) &= (1 + \varrho^{-m-1} O(1)) \{\mathfrak{y}^+(x_p, \varrho) + \varrho^{-m-1} e^{\varrho g(x_p)} O(1)\} \\ &\quad + O(1) \{\mathfrak{y}^-(x_p, \varrho) + \varrho^{-m-1} e^{-\varrho g(x_p)} O(1)\} \\ &= \mathfrak{y}^+(x_p, \varrho) + \varrho^{-m-1} e^{\varrho g(x_p)} O(1) \end{aligned}$$

und ebenso

$$y^{+\prime}(x_p, \varrho) = \mathfrak{y}^{+\prime}(x_p, \varrho) + \varrho^{-m} e^{\varrho g(x_p)} O(1).$$

Damit ist Satz III bewiesen.

§ 5.

Beweis von Satz IV.

Wir können annehmen, daß das im Satz IV genannte Intervall $\mathfrak{n}$ der negativen reellen Achse den Punkt x_n enthält. Es sei $y_1(x, \varrho)$ diejenige

Lösung der Differentialgleichung (1), die im Punkte x_n dieselben Anfangswerte besitzt wie $\mathfrak{y}$, das heißt es sei

$$y_1(x_n, \varrho) = \mathfrak{y}(x_n, \varrho),$$
$$y_1'(x_n, \varrho) = \mathfrak{y}'(x_n, \varrho).$$

Nach Satz I gilt dann in $\mathfrak{n}$ gleichmäßig

$$\begin{aligned} y_1(x, \varrho) &= \mathfrak{y}(x, \varrho) + \varrho^{-m-1} O(1), \\ y_1'(x, \varrho) &= \mathfrak{y}'(x, \varrho) + \varrho^{-m} O(1). \end{aligned} \tag{55}$$

Subtrahiert man von den mit 2 multiplizierten Relationen (33) die Relationen (55), so kommt zunächst für $x = x_n$

$$\begin{aligned} 2\, y(x, \varrho) - y_1(x, \varrho) &= \overline{\mathfrak{y}(x, \varrho)} + \varrho^{-m-1} O(1), \\ 2\, y'(x, \varrho) - y_1'(x, \varrho) &= \overline{\mathfrak{y}'(x, \varrho)} + \varrho^{-m} O(1). \end{aligned} \tag{56}$$

Darin bezeichnet der Querstrich den konjugiert komplexen Wert. Nun ist aber $\overline{\mathfrak{y}(x, \varrho)}$ auf der negativen reellen Achse wieder eine asymptotische Lösung (im Falle $\mathfrak{y} = \mathfrak{y}^-$ haben wir sie in § 3 mit $\mathfrak{z}^+$ bezeichnet). Daher gelten die Relationen (56) nach Satz I gleichmäßig für alle x in $\mathfrak{n}$. Durch Addition von (55) und (56) folgt die gleichmäßige Gültigkeit von (33), also die Behauptung des Satzes IV.

Literaturverzeichnis.

[1] Liouville, Sur le développement des functions. Journ. de math. **2** (1837).

[2] J. Horn, Über lineare Differentialgleichungen mit einem willkürlichen Parameter. Math. Annalen **52**, S. 271—292; Über eine lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung mit einem veränderlichen Parameter. Ebenda, S. 340—362.

[3] G. D. Birkhoff, On the asymptotic character of the solutions of certain linear differential equations containing a parameter. Amer. Math. Soc. Trans. **9** (1908) S. 219—231.

[4] O. Blumenthal, Über asymptotische Lösungen. Arch. Math. Phys. III **19** (1912), S. 136—174.

[5] O. Perron, Über die Abhängigkeit der Integrale eines Systems linearer Differentialgleichungen von einem Parameter I, II, III. Sitz.-Ber. Akad. Wiss. Heidelberg 1918 und 1919.

[6] H. Jeffreys, On certain approximate solutions of linear differential equations of the second order. Proc. London Math. Soc. (2) **23** (1925), S. 428—454.

[7] S. Goldstein, A note on certain approximate solutions of linear differentia, equations of the second order. Proc. London Math. Soc. (2) **28** (1928), S. 81—90.

[8] R. E. Langer, On the asymptotic solutions of ordinary differential equations, with an application to Bessel functions of large order. Trans. Amer. Math. Soc. **33** (1931), S. 23—64.

[9] R. E. Langer, The boundary problem of an ordinary linear differential system in the complex domain. Trans. Amer. Math. Soc. **46** (1939), S. 151—190.

(Eingegangen am 23. 1. 1942.)

Geometrie der Gewebe

Topologische Fragen der Differentialgeometrie

Von

Dr. Wilhelm Blaschke und **Dr. Gerrit Bol**

Professor der Mathematik an der Universität Hamburg

Dozent an der Universität Freiburg i. Br.

(„Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften", Band XLIX)

Mit 137 Figuren. VIII, 339 Seiten. 1938

RM 28.50; Ganzleinen RM 29.70

Inhaltsverzeichnis: Einleitung. — Erster Abschnitt: **Die einfachsten Gewebe.** — **Kurvenscharen und Kurvennetze.** Aufgaben und Lehrsätze dazu. — **Sechseckgewebe.** Aufgaben und Lehrsätze dazu. — **Geradlinige Sechseckgewebe.** Aufgaben und Lehrsätze dazu. — **Gewebe und Gruppen.** Aufgaben und Lehrsätze dazu. — **Achtflachgewebe.** Aufgaben und Lehrsätze dazu. — **Vierseitgewebe.** Aufgaben und Lehrsätze dazu. — **Über eine Funktionalgleichung.** Aufgaben und Lehrsätze dazu. — **Zweigliedrige Gruppen mit eingliedrigen Untergruppen.** Aufgaben und Lehrsätze dazu. — **Ebene 4-Gewebe.** Aufgaben und Lehrsätze dazu. — **Der Satz von Mayrhofer und Reidemeister.** Aufgaben und Lehrsätze dazu. — **Lineare Differentiatoren.** — **Ebene *n*-Gewebe.** Aufgaben und Lehrsätze dazu. — **Vierseit-*n*-Gewebe.** Aufgaben und Lehrsätze dazu. — **Geradlinige Vierseitgewebe.** Aufgaben und Lehrsätze dazu. — Zweiter Abschnitt: **Invariantentheorie der Gewebe.** — Einleitung. — **Das Rechnen mit Differentiatoren. Differentiatorgewebe und Pfaffsche Formen.** — **Ebene 3-Gewebe.** — **Ebene 3-Gewebe. Pfaffsche Formen und kovariante Differentiation.** Aufgaben und Lehrsätze dazu. — **Geradengewebe.** Aufgaben und Lehrsätze dazu. — **Flächengewebe.** Aufgaben und Lehrsätze dazu. — **Vollständigkeitssätze.** — **Kurven-3-Gewebe im Raum.** Aufgaben und Lehrsätze dazu. — **Aufgaben und Lehrsätze allgemeiner Art.** — Dritter Abschnitt: **Abels Theorem in der Gewebegeometrie.** — **Abels Theorem und der Satz von Graf und Sauer.** Aufgaben und Lehrsätze dazu. — **Eine Umkehrung des Abelschen Theorems.** Aufgaben und Lehrsätze dazu. — **Ein Satz von H. Kneser.** Aufgaben und Lehrsätze dazu. — **Ebenengewebe.** — **Höchstzahlen.** Aufgaben und Lehrsätze dazu. — **Höchstzahlen für Flächengewebe.** — **Quasigeodätische Kurvensysteme.** Aufgaben und Lehrsätze dazu. — **Ebene 5-Gewebe höchsten Ranges.** Aufgaben und Lehrsätze dazu. — **Ein Gegenbeispiel.** Aufgaben und Lehrsätze dazu. — **Flächengewebe höchsten Ranges. Das Schnittgeradensystem.** Aufgaben und Lehrsätze dazu. — **Flächengewebe höchsten Ranges. Die Weylsche Geometrie.** Aufgaben und Lehrsätze dazu. — **Flächengewebe höchsten Ranges. Beweis des Hauptsatzes.** Aufgaben und Lehrsätze dazu. — **Ein Satz von F. Enriques.** Aufgaben und Lehrsätze dazu. — **Räumliche Kurvengewebe.** — **3-Gewebe höchsten Ranges.** Aufgaben und Lehrsätze dazu. — Abriß. — Schriftenverzeichnis. — Namen- und Sachverzeichnis.

SPRINGER — VERLAG · BERLIN

Theorie und Anwendung der Laplace-Transformation

Von

Gustav Doetsch
ord. Professor der Mathematik
an der Albert-Ludwigs-Universität Freiburg i. Br.

(„Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften", Band XLVII)

Mit 18 Figuren. XVI, 436 Seiten. 1937. RM 34.50; Ganzleinen RM 36.30

Inhaltsübersicht:

I. Teil: **Allgemeine Theorie der Laplace-Transformation.** Grundbegriffe der Funktionalanalysis. — Geschichtliches über die Laplace-Transformation. — Definition und analytische Eigenschaften der Laplace-Transformation. — Allgemeine funktionentheoretische Eigenschaften der l-Funktionen. — Die im Unendlichen regulären l-Funktionen. — Die komplexe Umkehrformel der Laplace-Transformation. — Andere Umkehrformeln für die Laplace-Transformation. — Die Abbildung der fundamentalen Operationen an Funktionen.

II. Teil: **Reihenentwicklungen.** Die Übertragung von Reihenentwicklungen.

III. Teil: **Asymptotisches Verhalten von Funktionen.** Abelsche und Taubersche Sätze. — Ein allgemeines Prinzip der asymptotischen Entwicklung und die verschiedenen Arten von Asymptotik. — Abelsche Asymptotik. — Tauber'sche Asymptotik. — Indirekte Abelsche Asymptotik.

IV. Teil: **Integralgleichungen.** Integralgleichungen vom reellen Faltungstypus. — Funktionalrelationen mit Faltungsintegralen, insbesondere transzendente Additionstheoreme. — Integralgleichungen und Funktionalrelationen vom komplexen Faltungstypus.

V. Teil: **Differentialgleichungen.** Gewöhnliche Differentialgleichungen. — Allgemeines über die Behandlung von partiellen Differentialgleichungen durch Funktionaltransformationen. — Die Wärmeleitungsgleichung (parabolischer Typ). — Die Telegraphengleichung und die Wellengleichung (hyperbolischer Typ). — Die Potentialgleichung (elliptischer Typ). — Gleichungen mit variablen Koeffizienten. — Die Beziehungen zum Heaviside-Kalkül und zur sogenannten funktionentheoretischen Methode. — Huygenssches und Eulersches Prinzip. — Anhang. — Historische Anmerkungen. — Literatur- und Sachverzeichnis.

S P R I N G E R – V E R L A G · B E R L I N

Springer-Verlag in Berlin W 9 — Verantwortlich für den Anzeigenteil: Albert Meyer, Berlin-Steglitz, Kühlebornweg 5 — Druck von Friedr. Vieweg & Sohn in Braunschweig
Printed in Germany
Pl. 3